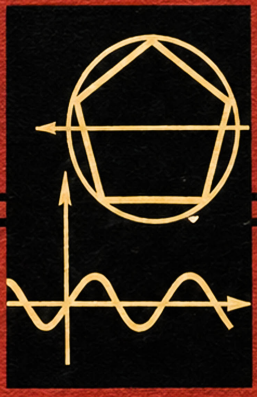
Справочник по элементарной математике

геометрия
тригонометрия
векторная алгебра



«НАУКОВА ДУМКА»

СПРАВОЧНИК
ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ

Геометрия, тригонометрия,
векторная алгебра

Под редакцией
члена-корр. АН УССР
П. Ф. ФИЛЬЧАКОВА

НАУКОВА ДУМКА
КИЕВ — 1966

51(083)
Ф57

Справочник охватывает все вопросы школьной программы по планиметрии, стереометрии и тригонометрии. В нем содержатся также основные сведения по векторной алгебре, приведены таблицы тригонометрических функций. В справочник включено много задач различных типов и степеней трудности. Особенно большое внимание уделяется решению задач на доказательства и построения как на плоскости, так и в пространстве, решению тригонометрических уравнений, обратным тригонометрическим функциям и т. д.

Справочник рассчитан на читателей, закончивших среднюю школу и желающих повысить уровень математических знаний в области геометрии, тригонометрии и векторной алгебры. Он также полезен при подготовке к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения.

ХАРЬКОВСКАЯ КНИЖНАЯ ФАБРИКА им. ФРУНЗЕ

2—2—2
555—66

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 7
Основные обозначения, принятые в справочнике 9

I. ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Предмет геометрии. Краткие сведения о ее развитии . . 11
§ 2. Основные понятия 13
§ 3. Действия с отрезками 15
§ 4. Деление отрезка в заданном отношении 19
§ 5. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении. Золотое сечение 20
§ 6. Гармоническая группа точек. Гармоническое разделение 21
§ 7. Аксиоматика. Определения. Теоремы. Доказательства. . . 22
§ 8. Необходимые и достаточные условия 26
§ 9. Углы 27
§ 10. Параллельные прямые 30
§ 11. Многоугольники 34
§ 12. Треугольники 38
§ 13. Соотношения между элементами треугольника 40
§ 14. Признаки равенства треугольников 51
§ 15. Подобие треугольников и многоугольников 59
§ 16. Понятие о площади и ее измерении 60
§ 17. Площадь треугольника 61
§ 18. Сводная таблица частных случаев треугольников 68
§ 19. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат 69
§ 20. Трапеция 76
§ 21. Окружность и круг 82
§ 22. Углы в круге 94
§ 23. Длина окружности. Площадь круга и его частей 99
§ 24. Степень точки относительно данной окружности. Радикальная ось. Радикальный центр 106
§ 25. Вписанные и описанные многоугольники 108
§ 26. Правильные многоугольники 113
§ 27. Сводная таблица частных случаев четырехугольников . . 116

Геометрические задачи на построение с помощью циркуля и линейки

§ 28. Простейшие задачи на построение 118
§ 29. Метод геометрических мест точек 134
§ 30. Метод подобия 142
§ 31. Метод симметрии 144
§ 32. Метод параллельного переноса 147
§ 33. Метод инверсии 149
§ 34. Построение фигур, равновеликих данным 152
§ 35. Алгебраический метод решения геометрических задач на построение 154
§ 36. Построение корней квадратного уравнения 158
§ 37. Геометрические задачи на неравенства 160

II. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Общие замечания

Прямые и плоскости в пространстве

§ 38. Основные свойства плоскости 165
§ 39. Взаимное расположение двух прямых в пространстве . . 166
§ 40. Взаимное расположение прямой и плоскости 167
§ 41. Параллельные плоскости 174
§ 42. Двугранные углы и перпендикулярные плоскости 178
§ 43. Задачи на построение в стереометрии 181
§ 44. Многогранные углы 186

Многогранники

§ 45. Основные определения 189
§ 46. Призма и параллелепипед 190
§ 47. Объем призмы и параллелепипеда 191
§ 48. Пирамида 199
§ 49. Усеченная пирамида 207
§ 50. Клин. Обелиск 212
§ 51. Подобие многогранников 213
§ 52. Правильные многогранники 215
§ 53. Построение плоских сечений многогранников 218

Круглые тела

§ 54. Цилиндр 223
§ 55. Конус 231
§ 56. Усеченный конус 236
§ 57. Конические сечения 242
§ 58. Сфера и шар 242

§ 59. Поверхность и объем шара и его частей 243
§ 60. Вписанный и описанный шары 252
§ 61. Геометрические места точек и прямых в пространстве . . 255

III. ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 62. Предмет тригонометрии 258
§ 63. Тригонометрические функции острого угла 259
§ 64. Обобщение понятия угла. Измерение дуг и углов 266
§ 65. Тригонометрические функции произвольного угла 270
§ 66. Основные тригонометрические тождества 276
§ 67. Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций 279
§ 68. Формулы приведения 280
§ 69. Четность и нечетность тригонометрических функций . . . 282
§ 70. Формулы двойных и тройных углов (аргументов) 283
§ 71. Формулы половинного аргумента 286
§ 72. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму 288
§ 73. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение 290
§ 74. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента 293
§ 75. Преобразование тригонометрических выражений с помощью введения вспомогательного аргумента 294
§ 76. Тригонометрические функции абстрактного аргумента . . 295
§ 77. Периодичность тригонометрических функций 296
§ 78. График и некоторые свойства функции $y = \sin x$ 296
§ 79. График и некоторые свойства функции $y = \cos x$ 300
§ 80. График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ 301
§ 81. График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$ 302
§ 82. График и некоторые свойства функции $y = \sec x$ 303
§ 83. График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{cosec} x$ 305
§ 84. Простые гармонические колебания 306

Тригонометрические уравнения

§ 85. Простейшие тригонометрические уравнения 308
§ 86. О решении тригонометрических уравнений 310
§ 87. Методы решения тригонометрических уравнений с функциями одного аргумента 310
§ 88. Тригонометрические уравнения с разными аргументами . . 320
§ 89. Графические методы решения тригонометрических уравнений 324
§ 90. Системы тригонометрических уравнений 325
§ 91. Тригонометрические неравенства 328

§ 92. Обратные тригонометрические функции 335
§ 93. Решение прямолинейных треугольников 349
§ 94. Применение тригонометрии к решению планиметрических задач 357
§ 95. Применение тригонометрии к решению стереометрических задач 364

IV. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 96. Вводные замечания 375
§ 97. Скалярные и векторные величины 376
§ 98. Равенство векторов 376
§ 99. Сложение и вычитание векторов 377
§ 100. Умножение вектора на число 379
§ 101. Векторная сумма и правила ее преобразования 380
§ 102. Векторные равенства и их основные свойства 380
§ 103. Разложение вектора на компоненты 383
§ 104. Понятие о линейной зависимости между векторами . . . 384
§ 105. Проекция вектора на ось 384
§ 106. Упорядоченные связки трех векторов 386
§ 107. Координаты вектора на плоскости и в пространстве. Координаты суммы векторов 386
§ 108. Разложение вектора по базисной системе векторов . . . 389
§ 109. Понятие об умножении векторов 393
§ 110. Скалярное произведение двух векторов 394
§ 111. Некоторые применения векторной алгебры в геометрии 396
§ 112. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами 402
§ 113. Вычисление длины отрезка по координатам его концов. Вычисление угла между двумя векторами 403
§ 114. Некоторые применения векторной алгебры в тригонометрии и в физике 405
§ 115. Векторное произведение двух векторов 408
§ 116. Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами 410
§ 117. Скалярно-векторное произведение трех векторов 411

Приложения 414

Таблица I. Четырехзначная таблица тригонометрических функций для градусного аргумента 418
Таблица II. Четырехзначная таблица тригонометрических функций для радианного и абстрактного аргументов . . 420
Таблица III. Переход от градусной меры углов к радианной . . 433

Литература 434

Алфавитный указатель 436

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проекты учебных программ и планов для средней школы, составленные в 1965 г. с участием ведущих ученых нашей страны, широко обсуждались работниками народного просвещения и науки. Наряду с сокращением сроков обучения в школе предусмотрено также дальнейшее серьезное повышение научно-теоретического уровня среднего образования.

В частности, повышение теоретического уровня курса математики, как указано в объяснительной записке к проекту новой программы, достигается преодолением разрыва между арифметикой и алгеброй, осуществлением строго научного подхода к изучению материала, усилением внимания к понятиям и методам, имеющим основное значение для естествознания и техники (метод координат, векторы, производная и интеграл, вероятность).

Проект учебного плана предусматривает также сокращение нагрузки учащихся обязательными учебными занятиями, расширение самостоятельной работы учащихся, факультативных занятий и занятий по выбору. Не оставлены без внимания вопросы подготовки учащихся к дальнейшему самообразованию и образованию без отрыва от производства по окончании школы.

Следовательно, возникает необходимость в расширении учебной и справочной литературы, которая более полно соответствовала бы новым требованиям программы.

Часто о том или другом человеке говорят: «Он знает математику» или «он плохо знает математику» и рассматривается это как нечто установленное, застывшее. Возникает вопрос: что такое «знать математику»?

В математике, как и в другой точной науке, уровень знаний определяется двумя факторами.

Первый фактор — достаточно большое количество усвоенного и твердо запомнившегося материала: определений, формулировок теорем и свойств, формул и т. д. Усвоение фактического материала происходит в процессе упражнений, однако следует как можно

быстрее добиваться его твердого запоминания, обеспечивая для памяти возможность дальнейшего постоянного обогащения.

Не может быть и речи о каких-либо серьезных знаниях, если учащийся не запомнит той или иной формулы, а попытается «выводить» даже мелкие факты (например, выражение диагонали квадрата через его сторону, вычисление высоты и площади равностороннего треугольника по его стороне и т. д.).

Второй фактор, который тесно связан с первым и отнюдь не является достоянием только лишь талантливых от природы, — это достаточно глубокое развитие аналитических способностей и навыков, необходимых при выполнении сложных преобразований, четких пространственных представлений и «геометрического» мышления, опыта и интуиции, необходимых при отыскании путей к решению нешаблонных «творческих» задач. Только насыщенная фактами, аналогичными ситуациями и различными, даже отдаленными, связями память способна вовремя подать необходимый «инструмент» для глубоких размышлений над той или иной проблемой для ее всестороннего анализа.

Таким образом, процесс повышения уровня математических знаний представляет собой постоянное совершенствование в двух, отмеченных выше, направлениях, находящихся между собой в неразрывной связи. Этому и призваны способствовать справочники, являющиеся по существу «малогабаритными конденсаторами» большого количества фактического материала, наводящих рекомендаций и сведений по различным методам решения задач и т. д.

Предлагаемый вниманию читателей справочник содержит основной материал по разделам «Планиметрия», «Стереометрия», «Тригонометрия» и «Векторная алгебра». Некоторый параллелизм, допущенный при изложении разделов «Геометрия» и «Векторная алгебра», по мнению составителей, должен облегчить ориентацию в данном материале для учащихся, обучавшихся в разные годы и по различным учебным программам. Кроме того, справочник содержит значительное количество задач и упражнений разной степени трудности: большое внимание уделено построениям и доказательствам, решению тригонометрических уравнений и неравенств, преобразованиям обратных тригонометрических функций и ряду других вопросов, недостаточно освещенных в литературе.

Справочник подготовлен коллективом составителей под общей редакцией члена-корреспондента АН УССР П. Ф. Фильчакова.

Все критические замечания и предложения по данному справочнику, которые составителями будут приняты с благодарностью, просьба направлять по адресу: Киев-4, ул. Репина, 3, Издательство «Наукова думка».

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В СПРАВОЧНИКЕ

		Примеры
$=$	равно	$a = b$
$\neq$	не равно	$b \neq c$
$\equiv$	тождественно равно	$a + b \equiv b + a$
$\approx$	приближенно равно	$\pi \approx 3{,}14$
$>$	больше	$\pi > 3$
$<$	меньше	$\pi < \frac{22}{7}$
$\geqslant$	больше или равно	$a \geqslant b$
$\leqslant$	меньше или равно	$b \leqslant c$
a^n	число a в степени n	$2^5 = 32$
$\sqrt{\ }$	квадратный корень (квадратный радикал)	$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt[n]{\ }$	корень n-й степени (радикал n-й степени)	$\sqrt[n]{a}$
( ), [ ], { }	скобки круглые, квадратные, фигурные	
$\lvert a \rvert$	абсолютная величина числа	$\lvert -5 \rvert = 5$
$\triangle$	треугольник	$\triangle ABC$
$\parallel$	параллельно	$AB \parallel CD$
$\perp$	перпендикулярно	$MN \perp PQ$
$\sim$	подобно	$\triangle ABC \sim \triangle MNP$
$\angle$ или $\sphericalangle$	угол	$\angle ABC$ или $\sphericalangle ABC$
$\smile$ или $\frown$	дуга	$\overset{\smile}{AB}$ или $\overset{\frown}{AB}$ чаще $\smile AB$
$^\circ$	градус	угловые или дуговые меры: $27^\circ 53' 39''$
$'$	минута	
$''$	секунда	
рад	радианная угловая или дуговая мера	$10^\circ \approx 0{,}1745$ рад
$\pi = 3{,}1415926535\ldots$	отношение длины окружности к диаметру	
$\sin\alpha$	синус угла α	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	косинус угла α	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	тангенс угла α	$\operatorname{tg} 1{,}226$ рад $= 2{,}7844\ldots$

$\operatorname{ctg}\alpha$	котангенс угла α	$\operatorname{ctg} 0{,}306$ рад $= 3{,}165\ldots$
$\sec\alpha$	секанс угла α	$\sec 0{,}404$ рад $= 1{,}08755\ldots$
$\operatorname{cosec}\alpha$	косеканс угла α	$\operatorname{cosec} 30° = 2$
$\operatorname{Arcsin} x$	арксинус x, т. е. множество всех дуг α, для которых $\sin\alpha = x$	$\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = (-1)^n 30° + 180° \cdot n$
$\operatorname{Arccos} x$	арккосинус x, т. е. множество всех дуг α, для которых $\cos\alpha = x$	$\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} = \pm 60° + 360° \cdot n$
$\operatorname{Arctg} x$	арктангенс	$\operatorname{Arctg}\sqrt{3} = 60° + 180° \cdot n$
$\operatorname{Arcctg} x$	арккотангенс	$\operatorname{Arcctg}\sqrt{3} = 30° + 180° \cdot n$
$\arcsin x$	главное значение арксинуса	$\arcsin\frac{1}{2} = 30°$
$\arccos x$	главное значение арккосинуса	$\arccos\frac{1}{2} = 60°$
$\operatorname{arctg} x$	главное значение арктангенса	$\operatorname{arctg} 1 = 45°$
$\operatorname{arcctg} x$	главное значение арккотангенса	$\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = 30°$
$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$	обозначения векторов	$\bar{a} = \overline{AB}$
$\lvert\bar{a}\rvert$ или a	длина вектора $\bar{a}$	$\lvert\bar{a}\rvert = 3$
$\bar{l}_0$	единичный вектор того же направления, что и вектор $\bar{l}$	
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	координатные единичные векторы (орты) прямоугольной системы координат	
$m\bar{a}$	умножение скаляра на вектор	
$\bar{a}\bar{b}$ или $(\bar{a}\bar{b})$	скалярное произведение векторов	
$\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}\bar{b}]$	векторное произведение векторов	
$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ или $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$	смешанное произведение трех векторов	
a_x, a_y, a_z	координаты вектора $\bar{a}$ в трехмерной системе координат	

I. ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Предмет геометрии. Краткие сведения о ее развитии

В развитии геометрии (греческое γῆ — Земля и μετρέω — измеряю) как математической науки о пространственных формах, размерах и соотношениях геометрических образов (фигур, тел) можно выделить четыре основные периода, характеризующиеся существенными качественными изменениями.

Геометрия, как и всякая другая наука, возникла из практических потребностей человечества. Уже в древнем Египте, Вавилоне, Китае, Индии, Греции были известны многие геометрические факты и разработаны правила геометрических измерений.

Начало первого периода в развитии геометрии установить очень трудно — оно теряется в глубине веков и только известно, что самые древние, дошедшие до нас работы по геометрии относятся к XVII веку до н. э. Этот период характеризуется накоплением фактов и установлением первых простейших зависимостей между геометрическими образами.

В конце первого периода (примерно VI век до н. э.) начальные сведения из Египта и Вавилона были перенесены в Грецию, где постепенно они начали оформляться в стройную систему строго доказываемых фактов.

Во втором периоде (VI в. до н. э.— XVII в. н. э.) краеугольным камнем геометрии как математической науки явились «Начала» Эвклида *, которые выдержали уже сотни изданий и переведены на все основные языки мира.

В этой фундаментальной научной работе, составляющей пятнадцать книг и написанной Эвклидом около 300 лет до н. э., геометрия была систематизирована и изложена так, как ее в основном представляют и теперь, ограничиваясь, конечно, лишь элементарной геометрией. В «Началах» Эвклида геометрия развита в логической по-

* «Начала». Перевод с греч. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. 1—3, М. — Л., 1948 — 1950.

следовательности на основании четко сформулированных основных положений — аксиом и основных пространственных представлений: точка, прямая линия, плоскость, геометрическое тело.

На протяжении двадцати столетий второго периода геометрия Эвклида обогащалась новыми фактами и методами, сохранив свои основные принципы до наших дней.

Началом третьего периода в развитии геометрии можно считать XVII век. С этого времени, после введения в геометрию в 1637 г. французским ученым и философом Рене Декартом (1596—1650) метода координат и переменной величины, геометрия развивается особенно бурно. Появляются такие разделы геометрии, как геометрия аналитическая (свойства линий, поверхностей и соотношения между ними изучаются здесь с помощью исследования соответствующих уравнений в некоторой, чаще всего прямоугольной декартовой системе координат), геометрия дифференциальная (геометрические образы исследуются здесь с помощью методов высшей математики), геометрия начертательная, геометрия проективная и др.

На этом этапе своего развития геометрия использует уже существенно новые методы исследования, позволяющие глубоко изучать гораздо более общие геометрические образы.

Известно, что пятый постулат Эвклида не может быть логически выведен из остальных его аксиом. Тщетные попытки доказать его продолжались многие сотни лет. Выдающийся русский ученый Николай Иванович Лобачевский (1792—1856), избрав принципиально новый подход в этой сложной проблеме, открыл и строго логично изложил основные идеи совершенно новой неэвклидовой геометрии, развитой в дальнейшем другими математиками и играющей большую роль как для самой геометрии, так и для других наук.

Курс геометрии средней школы в своей основе является упрощенным и сокращенным курсом геометрии Эвклида. Он состоит из двух основных разделов: планиметрии и стереометрии. Для успешного усвоения курса геометрии, его изучение в средней школе должно сопровождаться решением большого количества задач. Только при этом условии учащиеся приобретают высокий уровень логического мышления и хорошие пространственные представления.

Геометрические задачи бывают разных типов: на вычисление, на построение и на доказательство. Хотя элементы каждого из этих типов содержатся почти во всякой задаче, тем не менее, сравнительно с задачами на вычисление, задачи на доказательство и на построение усваиваются учащимися значительно труднее.

В настоящем справочнике, в связи с этим, приводится ряд задач отмеченных выше типов различных степеней трудности.

Четвертый период развития геометрии начинается со времени открытия Н. И. Лобачевским в 1826 году новой геометрии, содержащей в себе, как частный случай, геометрию Эвклида.

Геометрия Лобачевского основывается на замене известного из школьного курса геометрии пятого постулата (аксиомы) Эвклида (через точку вне прямой на плоскости можно провести лишь одну прямую, параллельную данной) более общей аксиомой: через точку вне прямой на плоскости можно провести хотя бы две прямые, параллельные данной прямой.

К этим вопросам мы еще вернемся в III томе данного справочника.

По установившейся традиции и мы изложение начнем с раздела планиметрии (от лат. *planum* — плоскость и греч. μετρεω — измеряю), т. е. с раздела геометрии, в котором изучаются свойства фигур, расположенных в одной плоскости, а затем перейдем к геометрии в пространстве — стереометрии (от греч. στερεος — пространственный).

§ 2. Основные понятия

Элементарная геометрия изучает простейшие геометрические свойства объектов трехмерного пространства, т. е. пространства, в котором мы живем.

Первичные понятия — это такие простейшие понятия в математике, которые нельзя определить с помощью еще более простых.

Геометрическое тело, поверхность, линия, точка являются простейшими геометрическими образами — это понятия первичные.

Представление о геометрическом теле дает нам любой предмет, если рассматривать лишь его форму и размеры. Геометрическое тело имеет три измерения.

Поверхность можно представить себе как общую часть двух смежных областей пространства или как бесконечно тонкий слой, который разделяет две смежные части пространства. Поверхность не имеет толщины.

Линия представляется как общая часть (граница) двух смежных участков поверхности. В результате пересечения двух поверхностей мы получаем линию. Линия имеет лишь одно измерение — длину.

Точка отделяет смежные части линии.

Ясное представление о точках дают пересечения линий между собой и линий с поверхностью. Точка не имеет ни одного измерения.

Плоскость — частный вид поверхности, любая часть которой может быть совмещена с исходной плоскостью в любом ее месте как в прямом, так и в перевернутом виде (свойство прямого и перевернутого скольжения).

Никакая другая поверхность таким свойством не обладает. Например, часть сферической поверхности может скользить по этой же сфере, но без перевертывания. Часть эллипсоида вращения может скользить по этому эллипсоиду без перевертывания, но только

в определенном направлении. В общем случае эллипсоидальная поверхность свойством скольжения не обладает.

Если через две точки плоскости провести прямую линию, то и все точки этой прямой будут находиться на плоскости. Прямая линия — частный вид линии. Представление о прямой линии дает пересечение двух плоскостей.

Свойства прямой:

1. Через всякие две точки пространства можно провести прямую и притом только одну.
2. Если две прямые наложены одна на другую так, что какие-нибудь две точки одной прямой совпадают с двумя точками другой прямой, то эти прямые совпадают и во всех остальных точках.
3. Две прямые могут пересекаться лишь в одной точке.
4. Прямая обладает свойством скольжения — любой ее участок может скользить в обе стороны прямой бесконечно. Этим же свойством обладает еще только одна линия — окружность. Однако свойства 1—3 для окружности (полностью или частично) не выполняются: через любые две точки пространства можно провести бесконечное число окружностей; две окружности могут иметь две общие точки, но не совпадать во всех остальных точках, две окружности могут соприкасаться в одной точке или пересекаться в двух точках.

Бесконечная прямая — прямая, продолжающаяся в обе стороны бесконечно.

Обычно бесконечную прямую называют просто прямая.

Отрезок прямой — часть прямой, ограниченной с двух сторон точками.

Луч или *полупрямая* — часть прямой, ограниченная лишь с одной стороны, т. е. часть прямой, выходящей из заданной точки и уходящей в бесконечность в данном направлении.

Ломаная линия — линия, образуемая отрезками прямых, не лежащих на одной прямой и расположенных так, что конец первого отрезка служит началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. Отрезки прямых, образующих ломаную, называются *сторонами (звеньями)* ломаной. Точки стыка отрезков называются *вершинами* ломаной. Ломаная линия называется *выпуклой*, если все ее звенья расположены по одну сторону от каждого входящего в ее состав отрезка, продолженного неограниченно в оба конца. Ломаная называется *замкнутой*, если концы ее сходятся в одну точку.

Точками самопересечения ломаной линии называются такие точки, в которых пересекаются ее звенья. Концы звеньев при этом не учитываются.

Задача. Указать наибольшее число точек самопересечения замкнутой ломаной, состоящей из 7 звеньев.

Р е ш е н и е. Поскольку ломаная состоит из 7 звеньев, то на одном произвольно взятом звене может находиться не больше 4 точек самопересечения. Это следует из того, что рассматриваемое звено не будет иметь точек пересечения с тремя звеньями (с самим собой и двумя соседними).

Поскольку же каждая точка самопересечения принадлежит двум звеньям, то произведение количества звеньев на количество точек, лежащих на каждом звене, следует разделить пополам. Таким образом, наибольшее число точек самопересечения рассматриваемой ломаной равно $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ (рис. 1).

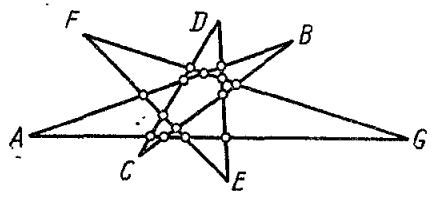


Рис. 1.

Аналогично можно доказать, что наибольшее число точек самопересечения ломаной, состоящей из 9, 11, 13, 15, . . . , $2n + 1$ звеньев, будет соответственно равно

$$\frac{9 \cdot 6}{2} = 27, \quad \frac{11 \cdot 8}{2} = 44, \quad \frac{13 \cdot 10}{2} = 65, \quad \frac{15 \cdot 12}{2} = 90, \ldots$$

$$\ldots, \frac{(2n + 1)(2n - 2)}{2} = 2n^2 - n - 1.$$

Можно доказать также, что для замкнутой ломаной, состоящей из k звеньев ($k \geqslant 3$), число N точек самопересечения удовлетворяет неравенству

$$N \leqslant \frac{k(k - 3)}{2},$$

§ 3. Действия с отрезками

1. Равенство и неравенство отрезков. Два отрезка считаются *равными*, если они могут быть совмещены своими концами.

Если на данном отрезке взять две точки, из которых хотя бы одна не совпадает с его концом, то отрезок, ограниченный этими точками, называется частью данного отрезка. Если один отрезок равен части второго, то про эти отрезки говорят, что первый меньше второго, а второй больше первого.

Отрезок считается *ориентированным*, если условились о том, где его начало и конец.

2. Сложение и вычитание отрезков. *Сложением (вычитанием) отрезков* называется графическая операция, с помощью которой на некоторой прямой может быть построен отрезок, являющийся суммой данных отрезков — слагаемых (или отрезок — разность отрезков

уменьшаемого и вычитаемого). Сложение отрезков следует отличать от сложения длин отрезков. В результате сложения отрезков находим длину отрезка — суммы.

Суммой двух или нескольких отрезков называется отрезок, построенный на некоторой прямой по слагаемым без их взаимного наложения и без промежутков между ними (стыковка отрезков).

Сумма отрезков обладает переместительным и сочетательным свойствами.

Разностью двух отрезков называется отрезок, построенный путем наложения меньшего отрезка на больший так, чтобы начала или концы их совместились.

Пример 1. Найти (построить) отрезок $AB + NM + PQ$, где AB, NM и PQ — данные отрезки.

Решение. На произвольной прямой от некоторой точки R откладываем в любую сторону один из данных отрезков AB, NM или PQ. Далее на этой же прямой откладываем любой из оставшихся отрезков так, чтобы один из его концов совместился с каким-либо из концов отложенного отрезка, но без наложения этих отрезков. Таким же образом поступаем со следующим отрезком.

Пример 2. По данной сумме двух отрезков и одному из отрезков — слагаемых построить другой.

Решение. На отрезке — сумме от любого из концов отложим данный отрезок — слагаемое. Оставшийся отрезок будет искомым.

3. Умножение и деление отрезков на число. *Умножить* отрезок на целое положительное число n значит найти сумму n таких отрезков. Отрезок, полученный в результате, является отрезком — произведением.

Разделить отрезок на целое положительное число n значит найти такой отрезок, после умножения которого на число n получим данный отрезок.

Умножить отрезок на положительную рациональную дробь $\frac{m}{n}$ значит умножить этот отрезок на число m и полученный отрезок разделить на n частей.

Можно выполнить также сначала деление на n, а затем умножение на m.

Пример 3. Построить отрезок $\sqrt{n}$, где $n = 2; 3; 4; \ldots$

Решение. Выбрав произвольную единицу измерения, построим отрезок $AA_1 = 1$ и проведем $A_1A_2 \perp AA_1$, $A_1A_2 = 1$. Соединив точки A и A_2, проводим $A_2A_3 \perp AA_2$, $A_2A_3 = 1$. Далее аналогично $A_3A_4 \perp AA_3$, $A_3A_4 = 1$ и т. д. Очевидно, что $AA_2 = \sqrt{2}$, $AA_3 = \sqrt{3}$, $AA_4 = \sqrt{4}, \ldots, AA_n = \sqrt{n}$.

При построении отрезков вида $a\sqrt{n}$ в качестве начального отрезка строим отрезок $AA_1 = a$ и т. д. (рис. 2).

Пример 4. Построить отрезок $\frac{a}{\sqrt{2}} + b\sqrt{5}$, если даны отрезки a и b.

Решение. Построим отрезки $MN = a\sqrt{2}$ и $PQ = b\sqrt{5}$. Далее к половине отрезка NM прибавляем отрезок PQ.

Для быстрого построения отрезков вида $a \cdot \frac{m}{n}$ по заданному отрезку a, т. е. для изменения длины заданного отрезка в данном отношении, существует специальный прибор — *пропорциональный циркуль*. Этот прибор состоит из двух равных по длине ножек с прорезями, дающими возможность изменять длину ножек, когда ослаблен скрепляющий винт (рис. 3).

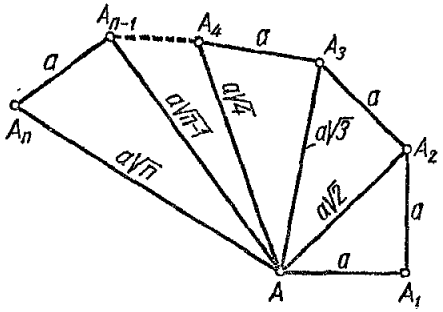


Рис. 2.

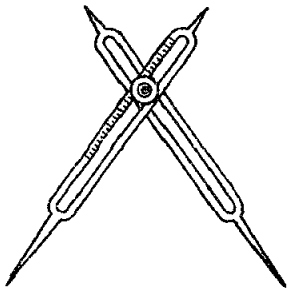


Рис. 3.

Отношение расстояния между остриями верхних ножек к расстоянию между остриями нижних ножек равно отношению длины верхних ножек к длине нижних. Поэтому, установив по шкале винт так, чтобы длины верхних и нижних ножек находились в данном отношении и измерив нижними ножками данный отрезок, получаем искомый, который рассматриваем как расстояние между концами верхних ножек.

Особенно удобно пользоваться пропорциональным циркулем, когда необходимо изменять в одном и том же отношении большое количество отрезков.

Пример 5. Доказать, что если данный отрезок AB произвольно разделить точкой O на две части AO и OB, то расстояние между серединами M и N отрезков AO и OB равно половине отрезка AB.

Доказательство. $MN = MO + ON$, $MO = AM$, $ON = NB$ (по условию). Тогда

$$AB = AM + MO + ON + NB = 2(MO + ON) = 2MN;$$

$$MN = \frac{1}{2} AB.$$

4. **Соизмеримые и несоизмеримые отрезки.** Измерение отрезков основано на утверждении, носящем название *аксиомы Архимеда*:

Если даны два любых отрезка AB и CD ($AB > CD$), то на прямой AB можно от точки A отложить отрезок CD последовательно столько раз, что получится отрезок AN, больший или равный отрезку AB, т. е. можно найти такое целое число n, что будут выполнены неравенства $n \cdot CD \geqslant AB$, $(n-1)\,CD < AB$.

Это очевидное утверждение доказано быть не может и принято в качестве аксиомы.

Общей мерой двух отрезков называется отрезок, который содержится в каждом из данных целое число раз (без остатка).

Не всякие два отрезка имеют общую меру, например сторона и диагональ квадрата ее не имеют. Два отрезка, имеющие общую меру, называются *соизмеримыми*, а не имеющие ее — *несоизмеримыми*.

5. **Длина отрезка.** Измерить отрезок, соизмеримый с некоторым отрезком, принятым за единицу длины, значит узнать сколько раз в нем содержится эта единица или какая-нибудь часть (доля) ее. Число, которое получается в результате измерения, будет *длиной отрезка*. Таким образом, длиной отрезка, соизмеримого с единицей длины, называется число, на которое надо умножить единицу длины, чтобы получить данный отрезок. Это число будет *рациональным*.

Если отрезок несоизмерим с единицей длины, то поступают так: от начальной точки данного отрезка откладывают на нем последовательно отрезок, равный единице длины, такое целое число a_1 раз, чтобы разность (остаток) между данным отрезком и произведением единицы длины на a_1 была меньше единицы длины. Затем на остатке откладывают 1/10 единицы длины такое целое число a_2 раз, чтобы разность между данным отрезком и произведением единицы длины на десятичную дробь a_1, a_2 была меньше 1/10 единицы длины. Теоретически этот процесс никогда не закончится, так как отрезок несоизмерим с единицей. Следовательно, получится бесконечная десятичная дробь, для вычисления любого десятичного знака которой указано правило. Она не может быть периодической, потому что в противном случае ее можно было бы привести к простой дроби и данный отрезок оказался бы соизмеримым с единицей. Построенная бесконечная дробь и называется длиной данного отрезка, несоизмеримого с единицей. Это число *иррациональное*. Числа a_1; a_1, a_2; a_1, a_2a_3 и т. д. называются приближенными значениями длины отрезка с точностью до 1; 0,1; 0,01 и т. д. Например, длина диагонали квадрата со стороной единица выражается иррациональным числом $\sqrt{2} = 1{,}41421356237309\ldots$

6. **Отношение отрезков.** *Отношением двух отрезков* называется отношение их длин, измеренных с помощью одной и той же единицы длины. Если отрезки AB и CD имеют длины m и n, это записывают так: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{m}{n}$. В частности, отношение отрезка к единице длины чис-

ленно равно длине отрезка. Отношение двух отрезков не зависит от единицы измерения.

Равенство двух отношений называется *пропорцией*. Две пары отрезков называются *пропорциональными*, если отношение отрезков одной пары равно отношению отрезков другой пары.

Отрезок a называется *средним пропорциональным* отрезков b и c, если

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}.$$

Пример 6. Отрезок длиной 24 *см* разделен на три равные части. Найти расстояние между серединами первой и третьей частей.

Решение. Расстояние между серединами первой и третьей частей будет равно длине отрезка без суммы длин двух половин третьей части всего отрезка, т. е. равно длине всего отрезка без его третьей части. Следовательно, расстояние между указанными серединами равно $24\ см - \frac{24}{3}\ см = 16\ см$.

Пример 7. По данной разности двух отрезков и меньшему из них построить больший отрезок.

Решение. Искомый отрезок находится как сумма данной разности и данного меньшего отрезка.

Пример 8. Доказать, что для точек A, B, C, D, лежащих на прямой так, что $AB = CD$, $AC = BD$, середина N отрезка AD является также серединой отрезка BC.

Доказательство. Поскольку точка N — середина отрезка AD, то $AN = ND$; следовательно, $AN - AB = ND - CD$, но $AN - AB = BN$, $DN - CD = NC$; значит, $BN = NC$, а отсюда вытекает, что точка N является серединой отрезка BC (построить рисунок).

§ 4. Деление отрезка в заданном отношении

Делением отрезка AB некоторой точкой N в данном отношении $\frac{m}{n}$ называется такое деление, при котором отношение образующихся в результате отрезков AN и BN равно данному отношению, т. е. имеет место пропорция:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{m}{n}.$$

Деление в заданном отношении называется *внутренним*, если точка N лежит внутри отрезка AB, и *внешним* — если точка N лежит на продолжении отрезка AB (рис. 4,*а*).

Пример. Данный отрезок AB разделить внешним образом в отношении $\frac{3}{2}$.

Решение. Проводим через точку A произвольную прямую и на ней от точки A откладываем отрезок $AC = 3a$, где a — произвольный отрезок. Далее от точки C в сторону точки A откладываем отрезок $CD = 2a$ (рис. 4, *б*).

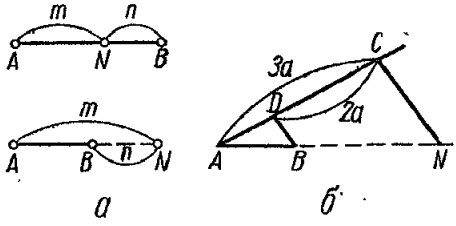


Рис. 4.

Проводим отрезки DB и $CN \parallel DB$. Точка N и будет искомой, т. е. она делит по определению данный отрезок AB внешним образом в заданном отношении, так как

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AC}{DC} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}.$$

§ 5. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении. Золотое сечение

Делением отрезка AB точкой N *в среднем и крайнем отношении* называется такое деление, при котором полученные после деления отрезки удовлетворяют равенству

$$AN : BN = AB : AN,$$

т. е. отрезок AN является средним пропорциональным между отрезком BN и всем отрезком AB.

Отрезок AN, удовлетворяющий этому условию, всегда определяется по данному отрезку AB с помощью формулы

$$AN = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB,$$

полученной из квадратного относительно AN уравнения

$$AN^2 = AB\ (AB - AN).$$

Отношение

$$\frac{AN}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$$

имеет замечательное свойство, подмеченное еще в древности, заключающееся в том, что предмет, картина, скульптурная композиция, здание или его отдельные части, вписывающиеся в прямоугольник с таким отношением сторон, способствуют наиболее четкому и легкому, приятному для глаз, восприятию форм даже на большом рас-

стоянии, что и использовалось в архитектуре, живописи и т. д. В теории музыки отношение длин струн, равное $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, создает гармонический аккорд.

В связи с этим деление отрезка в среднем и крайнем отношении часто называют *золотым сечением*.

Пример. Построить точку N, которая разделяет данный отрезок AB в среднем и крайнем отношении.

Решение. Из конца A отрезка AB проведем произвольный луч AK. Восстановим перпендикуляр $BD \perp AB$ до пересечения его с лучом AK в точке D. Радиусом BD из точки D сделаем засечку C на AK. Из точки A, как из центра, радиусом AC сделаем засечку N на отрезке AB. Точка N будет искомой (рис. 5).

§ 6. Гармоническая группа точек. Гармоническое разделение

Группа из четырех точек A, M, B, N, лежащих на одной прямой, называется *гармонической*, если отрезки AM, AN, BM и BN составляют пропорцию (рис. 6):

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN}.$$

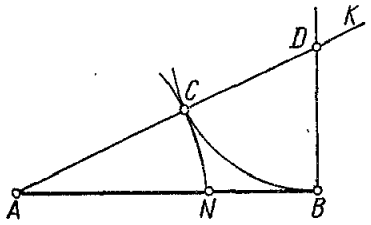


Рис. 5.

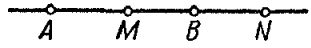


Рис. 6.

Из определения гармонической группы точек следует, что точка M делит отрезок AB внутренним образом, а точка N делит AB в том же отношении внешним образом. Такое разделение точек A и B точками M и N называется *гармоническим разделением*. При этом, если точки M и N гармонически разделяют точки A и B, то точки A и B гармонически разделяют точки M и N. Точки M и N называются гармонически сопряженными относительно точек A и B (и наоборот).

Пример. Даны три точки A, B и M, лежащие на одной прямой. Построить четвертую, гармоническую к ним точку N, т. е. такую точку N, которая вместе с данными образовывала бы гармоническую группу точек.

Решение. Через точку A проведем произвольный луч и на нем от точки A отложим отрезок $AC = AM$ (рис. 7). Далее от точки C в сторону точки A отложим отрезок $CD = BM$. Соединим точки

B и D и проведем $CN \parallel BD$. Точка N будет искомой. Действительно, $\triangle ACN \sim \triangle ABD$; следовательно, $\frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AD}$ (см. § 15).

Образуем производную пропорцию:

$$\frac{AN}{AN - AB} = \frac{AC}{AC - AD}.$$

Поскольку $AN - AB = BN$, $AC - AD = AC - (AC - DC) = DC = BM$, то можно записать производную пропорцию так:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}.$$

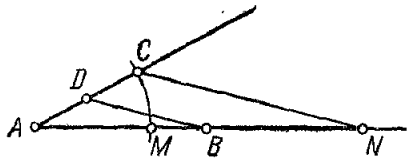


Рис. 7.

Следовательно, точка N является гармонически сопряженной с данной точкой M отиосительно точек A и B.

§ 7. Аксиоматика. Определения. Теоремы. Доказательства

Аксиома (греческое ἀξίωμα — уважение, авторитет) — *математическое предложение, принимаемое без доказательства.*

К системе аксиом, рассматриваемых как исходные предложения при построении той или иной математической теории, предъявляются требования непротиворечивости, независимости и полноты.

Система аксиом называется *непротиворечивой*, если из нее нельзя логически вывести два взаимно исключающих друг друга предложения.

Система аксиом называется *независимой*, если никакая из аксиом этой системы не является следствием других аксиом этой системы.

Непротиворечивая и *независимая* система аксиом является полной, если она достаточна для построения той или иной математической теории. Строгое определение полноты системы аксиом выходит за рамки элементарной математики.

В настоящее время в геометрии принята система аксиом, состоящая из пяти групп. Классификация аксиом геометрии была предложена немецким математиком Давидом Гильбертом (1862—1943) в 1899 году.

Первая группа аксиом состоит из шести *аксиом соединения:*

1. Две точки определяют только одиу прямую.

2. На каждой прямой лежит не менее двух точек. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

3. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

В каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.

4. Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то и все точки ее лежат в той же плоскости.

5. Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют еще хотя бы одну общую точку.

6. Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие на одной плоскости.

Пример 1. Сколько различных прямых можно провести через 4 произвольно расположенные на плоскости точки? Через 10 точек? Через n точек?

Решение. Каждая пара точек определяет одну прямую. Две пары точек являются разными, если они отличаются хотя бы одной точкой. Разные две пары точек определяют две различные прямые. Следовательно, количество прямых, определяемых 4-мя точками, будет равно числу сочетаний из 4-х элементов по 2 (рис. 8)

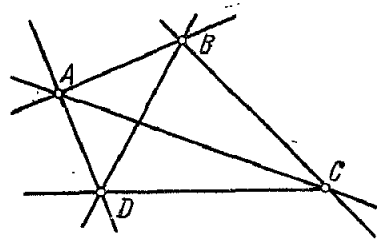


Рис. 8.

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ (прямых)}.$$

Число прямых, определяемых 10-ю произвольными точками, будет равно

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ (прямых)}.$$

Для n произвольных точек получаем

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ (прямых)}.$$

Вторая группа аксиом состоит из четырех *аксиом порядка*:

1. Если точка B лежит на прямой между точками A и C, то A, B и C — различные точки прямой и B лежит также между C и A.

2. При данных двух точках A и B на прямой линии существует по крайней мере одна такая точка C, что B лежит между A и C.

3. Из трех данных точек на прямой не более чем одна лежит между двумя другими.

4. Если в данной плоскости даны треугольник ABC и какая-нибудь прямая l, не проходящая через одну из его вершин и пере-

секающая сторону AB, то эта прямая непременно пересечет одну из двух других сторон AC или BC.

Аксиомы третьей группы называются *аксиомами конгруэнтности* (от латинского *congruens* — совпадающий, согласованный, в геометрии — равный). К третьей группе относятся пять аксиом:

1. На любой прямой от любой ее точки можно отложить отрезок, равный данному.

2. Два отрезка, равные третьему, равны между собой.

3. Пусть A, B, C — точки одной прямой и K, L, M — также точки одной прямой. Пусть, кроме того, $AB = KL$, $BC = LM$. Если отрезки AB и BC, а также KL и LM не имеют общих точек, то $AC = KM$.

4. От любой точки данной прямой по данную сторону можно построить один и только один угол, равный данному. Каждый угол равен самому себе.

5. Если в двух треугольниках ABC и KLM стороны $AB = KL$, $AC = KM$ и $\angle BAC = \angle LKM$, то $\angle ABC = \angle KLM$.

К четвертой группе аксиом относится лишь одна *аксиома о параллельности прямых*.

1. Через данную точку в данной плоскости можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Пятая группа аксиом состоит из двух *аксиом непрерывности прямой*. Одна из них, называемая *аксиомой Архимеда*, была сформулирована в § 3.

Вторая аксиома непрерывности называется *аксиомой линейной полноты*. Ее формулировка такова: точки прямой линии образуют такую систему точек, которую нельзя дополнить новыми точками без нарушения ранее установленных аксиом.

Аксиома линейной полноты лежит в основе взаимнооднозначного соответствия между множеством точек на числовой прямой и множеством вещественных чисел.

Определение — четкая формулировка того или иного математического понятия.

Доказательство — рассуждение, в ходе которого строго устанавливается истинность или ложность утверждения.

Теорема — математическое предложение, истинность которого устанавливается путем доказательства.

Формулировка всякой теоремы содержит две части: заключение теоремы и условие, при котором это заключение имеет место.

Простой теоремой называется такая теорема, которая содержит лишь одно условие и одно заключение.

Сложная теорема — это такая теорема, которая содержит несколько условий или заключений.

Лемма — вспомогательная теорема.

Обратная теорема — это теорема, в которой условием является заключение, а заключением — условие данной теоремы.

Пример 2. Прямая теорема: Если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов его катетов равна квадрату гипотенузы.

Обратная теорема: Если в некотором треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник прямоугольный.

Противоположная теорема — это теорема, условие и заключение которой являются отрицаниями условия и заключения данной теоремы.

Пример 3. Теорема, противоположная теореме Пифагора, может быть сформулирована так. Если треугольник не прямоугольный, то квадрат любой его стороны не равен сумме квадратов двух других сторон.

Необходимости в доказательстве этой теоремы нет, так как для треугольника, не являющегося прямоугольным, доказаны теоремы о сторонах, лежащих против тупого и острого углов.

Прямая и обратная, а также прямая и противоположная теоремы являются соответственно *взаимнообратными* и *взаимнопротивоположными*.

Отметим, что не для всякой теоремы верна обратная, но для всякой прямой теоремы всегда верна обратная противоположной. В такой же зависимости находятся обратная и противоположная теоремы.

Пример 4. Прямая теорема: Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны (теорема верна).

Обратная теорема: Если две дуги окружности равны, то и соответствующие им центральные углы равны (теорема верна).

Противоположная теорема: Если центральные углы не равны, то и соответствующие им дуги не равны (теорема верна).

Обратная противоположной теорема: Если две дуги окружности не равны, то и соответствующие им центральные углы не равны (теорема верна).

Пример 5. Прямая теорема: Если стороны двух острых углов перпендикулярны, то эти углы равны (теорема верна).

Обратная теорема: Если два острых угла равны, то их стороны перпендикулярны (теорема неверна).

Противоположная теорема: Если стороны двух острых углов не перпендикулярны, то эти углы не равны (теорема неверна).

Обратная противоположной теорема: Если два острых угла не равны, то их стороны не перпендикулярны (теорема верна).

§ 8. Необходимые и достаточные условия

Если прямая и обратная теоремы верны, то эти две теоремы можно сформулировать в виде одной теоремы, используя понятие необходимости и достаточности. Понятие о необходимом и достаточном условии для выполнения какого-либо верного утверждения (теоремы, суждения) является одним из важнейших в математике.

Необходимое условие — всякое условие, без выполнения которого данное утверждение неверно.

Пример 1. Чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

Очевидно, что приведенное условие необходимо, но далеко недостаточно, так как при этом условии существует бесконечно много форм четырехугольников, не являющихся квадратами.

Пример 2. Чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы его диагонали были равны.

Данное условие необходимо, но также само по себе недостаточно, так как этому условию удовлетворяют не только квадраты, но и прямоугольники.

Для выполнения какого-либо утверждения можно указать несколько необходимых условий.

Пример 3. Для того чтобы четырехугольник был квадратом, оба приведенные выше условия, взятые вместе, необходимы, но недостаточны.

Достаточное условие — всякое условие, из которого следует, что утверждение справедливо.

Пример 4. Если стороны четырехугольника равны, то такой четырехугольник — параллелограм.

Действительно, приведенное условие является достаточным, но оно не является необходимым, так как и без него четырехугольник может быть параллелограмом.

Для выполнения какого-либо предложения может существовать не одно, а несколько достаточных условий.

Пример 5. Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — ромб.

Приведенное условие является необходимым и достаточным, так как, если четырехугольник есть ромб, то легко доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам (доказательство необходимости условия); если же дано, что диагонали перпендикулярны и делятся в точке пересечения пополам, то и в этом случае легко доказать равенство сторон четырехугольника, т. е. то, что четырехугольник есть ромб. Поэтому приведенное утверждение можно также сформулировать следующим образом: чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо и доста-

точно, чтобы его диагонали были перпендикулярны и в точке пересечения делились пополам.

Отметим, что утверждение может быть справедливо при выполнении нескольких необходимых и достаточных условий.

Пример 6. Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих требований:

1. Диагонали должны быть равны и в точке пересечения делиться пополам.

2. Все углы должны быть прямые.

Необходимое и достаточное условие называют также необходимым и достаточным *признаком*.

В формулировках теорем выражение «необходимо и достаточно» часто заменяется одним из выражений «тогда и только тогда», «те и только те», «в том и только в том случае, если» и др.

§ 9. Углы

1. **Основные определения.** *Плоский угол* — фигура, образованная двумя лучами или отрезками, выходящими из одной точки. Лучи или отрезки, образующие угол, называются *сторонами* угла, а точка, из которой они выходят, *вершиной* угла. Угол обозначается специальным значком и буквой, поставленной у его вершины или внутри угла, а также тремя большими буквами, из которых средняя та, которая стоит у вершины угла. Например, $\angle A$, $\angle \alpha$, $\angle POQ$ и т. д.

Плоскость разделяется сторонами угла на внутреннюю область угла и внешнюю.

Два угла называются равными, если при наложении они совпадают.

Если стороны углов образованы отрезками, то при равенстве углов равенство сторон может не соблюдаться.

Развернутым углом называется угол, одна сторона которого является продолжением другой.

Два угла, имеющие общую вершину и общую сторону, называются *прилежащими*, если их внутренние области не покрывают одна другую.

Смежными углами называются два прилежащих угла, не совпадающие стороны которых образуют прямую.

Чтобы построить угол, смежный данному, нужно одну из сторон данного угла продолжить за его вершину.

Если два смежных угла равны между собой, то каждый из них называется *прямым* углом.

Пример 1. Доказать, что если угол, равный полуразности смежных углов, вычесть из прямого угла, то получится меньший из смежных углов.

Доказательство. Обозначим меньший из смежных углов через α. Другой смежный угол при этом равен $180° - \alpha$. Полуразность смежных углов равна

$$\frac{1}{2}[(180° - \alpha) - \alpha] = 90° - \alpha.$$

Вычитая эту полуразность из прямого угла, получим в результате угол α, что и требовалось доказать.

Вертикальные углы — такие два угла, у которых стороны одного являются продолжением сторон другого. Вертикальные углы образуются при пересечении двух прямых.

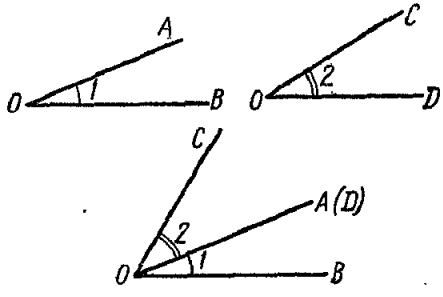


Рис. 9.

Перпендикулярные прямые — такие две прямые линии, которые при пересечении образуют равные вертикальные либо смежные углы (либо прямые вертикальные углы).

2. Действия с углами. Если вершину и сторону одного угла совместить с вершиной и стороной второго угла, а другие стороны этих углов разместить по одну сторону от совмещенной, то:

а) первый угол меньше второго, если несовмещенная сторона его находится внутри (во внутренней области) второго угла;

б) первый угол больше второго, если несовмещенная сторона его находится во внешней области второго угла.

Если вершину и сторону одного угла совместить с вершиной и стороной второго угла так, чтобы их внутренние области не накладывались, то образованный несовмещенными сторонами угол называется *суммой данных углов* (рис. 9). Сумма нескольких углов определяется аналогично.

Сумма углов обладает переместительным и сочетательным свойствами.

Разность углов, умножение и деление угла на число определяется аналогично соответствующим понятиям для отрезков.

Биссектриса угла — луч, исходящий из вершины угла и делящий угол на две равные части (пополам).

Пример 2. Доказать, что прямая, проведенная через вершину угла перпендикулярно к его биссектрисе, есть биссектриса угла, смежного с данным.

Доказательство. Обозначим через BD биссектрису угла ABC. Проведем прямую $BL \perp BD$ (рис. 10). Если $\angle DBC = \angle DBA$, то $\angle ABL = 90° - \angle DBC$, а

$$\angle NBL = 180° - (90° + \angle DBC) = 90° - \angle DBC.$$

Следовательно, $\angle NBL = \angle ABL$, т. е. прямая BL — биссектриса угла ABN, смежного с углом ABC, что и требовалось доказать.

Таким образом, биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение одна другой.

3. **Измерение углов.** *Мерой угла* служит величина поворота луча OA вокруг точки O как центра вращения.

Полным углом называется угол, полученный при одном полном обороте луча OA. Точка A при этом опишет окружность радиуса OA.

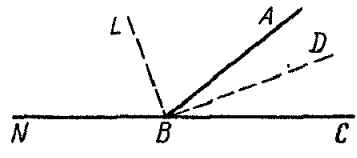


Рис. 10.

Половина полного угла составляет *развернутый* угол. Четвертая часть полного угла, следовательно, составляет *прямой* угол. Один радиан — это такой центральный угол, дуга которого равна радиусу окружности. Обозначается радиан сокращенно — *рад*.

Поворот луча OA на 1 *рад* — это такой поворот, при котором точка A описывает дугу, равную по длине отрезку OA. Следовательно, в полном обороте 2π радианов.

В развернутом угле $\pi = 3{,}141592653589...$ радианов, в прямом угле $\frac{\pi}{2}$ радианов.

Широко распространена также градусная система измерения углов.

Один градус (1° — единица измерения углов в градусной системе) — это угол, составляющий $\frac{1}{360}$ часть полного угла. Дуга центрального угла в 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть дуги окружности.

Одна минута (1′) составляет $\frac{1}{60}$ часть градуса.

Одна секунда (1″) составляет $\frac{1}{60}$ часть минуты или $\frac{1}{3600}$ часть градуса.

Слово «минута» происходит от латинского *minutus* — уменьшенный, малый, что в данном случае означает более мелкую часть

градуса, а слово «секунда» происходит от латинского *secunda* — второй, т. е. второе (еще меньшее) деление градуса.

В полном обороте 360°, что эквивалентно 2π радианов.

Следовательно:

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ\, 17'\, 45'',$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радианов} \approx 0{,}017453 \text{ радианов},$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ радианов} \approx 0{,}0002909 \text{ радианов},$$

$$1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ радианов} \approx 0{,}00000485 \text{ радианов}.$$

Переход от градусного измерения к радианному и обратно осуществляется соответственно по формулам:

$$\varphi_{\text{радиан}} = \frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}, \qquad \varphi^\circ = \frac{180^\circ \cdot \varphi_{\text{радиан}}}{\pi}.$$

Развернутый угол содержит 180°. Прямой угол содержит 90°.

Острым углом называется угол, содержащий меньше 90°; *тупым* углом называется угол, содержащий больше 90°, но меньше 180°.

Для измерения углов и дуг в простейших случаях применяется прибор, называемый *транспортиром*.

Пример 3. Доказать, что если два угла не равны, то и смежные их углы не равны, причем большему углу соответствует меньший смежный угол.

Доказательство. Пусть $\measuredangle \alpha > \measuredangle \beta$. Обозначим через $\measuredangle \alpha_1$ и $\measuredangle \beta_1$ соответственно смежные углы углов α и β, тогда

$$\measuredangle \alpha_1 = 180^\circ - \measuredangle \alpha; \quad \measuredangle \beta_1 = 180^\circ - \measuredangle \beta.$$

При равенстве уменьшаемого та разность меньше, где вычитаемое больше; следовательно,

$$\measuredangle \alpha_1 < \measuredangle \beta_1.$$

Отметим, что при радианном измерении углов слово радиан обычно опускают и, например, говорят, что прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$.

§ 10. Параллельные прямые

Параллельными называются прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы их не продолжали.

Параллельность прямых обозначается знаком $\parallel$. Например, если прямые AB и CD параллельны, то пишут $AB \parallel CD$. Параллельность

трех прямых AB, CD и MN можно записать так: $AB \parallel CD \parallel MN$ и т. д.

Совокупность всех прямых линий, проходящих через заданную точку, называется *пучком прямых*.

Совокупность всех параллельных между собою линий называется *пучком параллельных прямых*.

Параллельные прямые обладают следующими свойствами:

1. Все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой.

2. Все прямые, параллельные некоторой прямой l, параллельны между собой.

3. Принято считать, что две параллельные прямые составляют угол, равный нулю.

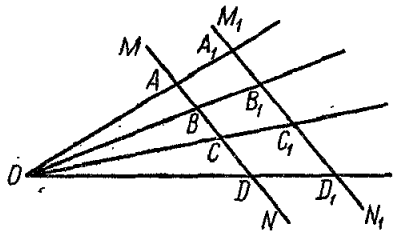


Рис. 11.

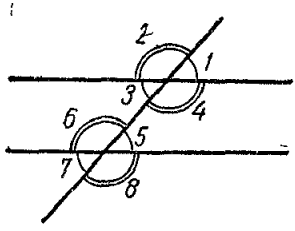


Рис. 12.

4. Все прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой линии, параллельны между собой.

5. Если прямая перпендикуляриа к одной из пучка параллельных прямых, то она перпендикуляриа и ко всем остальным прямым этого пучка.

6. Если прямые перпендикулярны к двум параллельным прямым, то их отрезки, заключенные между параллельными прямыми, равны.

7. Если ряд параллельных прямых пересекает стороны угла, то на сторонах этого угла отсекаются пропорциональные отрезки

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{OC}{OC_1} = \cdots = \frac{ON}{ON_1}.$$

8. Если две параллельные прямые MN и M_1N_1 пересекаются рядом прямых, проходящих через точку O, то эти прямые рассекаются на пропорциональные части (рис. 11)

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \text{ и т. д.}$$

Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образуются восемь углов (рис. 12).

1. *Соответственные углы* ($\angle 1$ и $\angle 5$, а также $\angle 4$ и $\angle 8$). Соответственные углы попарно равны.

2. *Внутренние накрестлежащие углы* ($\angle 3$ и $\angle 5$, а также $\angle 4$ и $\angle 6$). Эти углы попарно равны.

3. *Внешние накрестлежащие углы* ($\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$). Эти углы также попарно равны.

4. *Внутренние односторонние углы* ($\angle 4$ и $\angle 5$, а также $\angle 3$ и $\angle 6$). Односторонние углы попарно в сумме составляют 180°.

5. *Внешние односторонние углы* ($\angle 1$ и $\angle 8$, а также $\angle 2$ и $\angle 7$). Эти углы попарно в сумме также составляют 180°.

Имеют место и обратные утверждения, а именно:

Две прямые параллельны, если при пересечении этих прямых третьей прямой окажется, что:

1) какие-нибудь соответственные углы равны, или

2) какие-нибудь накрестлежащие углы равны или,

3) сумма каких-нибудь двух внутренних или двух внешних односторонних углов равна 180°.

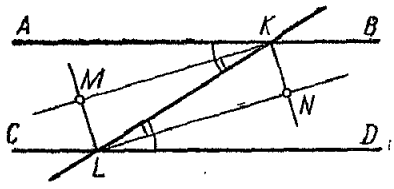


Рис. 13.

Углы с соответственно параллельными сторонами между собой равны, если оба они острые или оба тупые.

Углы с соответственно параллельными сторонами составляют в сумме 180°, если один из них острый, а другой тупой.

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны между собой, если они оба острые или оба тупые и составляют в сумме 180°, и при этом один из них острый, а другой тупой.

Задача 1. Доказать, что биссектрисы внешних или внутренних односторонних углов при параллельных прямых взаимно перпендикулярны, а соответственных или накрестлежащих углов параллельны.

Доказательство. Пусть биссектрисы внутренних односторонних углов BKL и DLK пересекаются в точке N (рис. 13). Через точку L проведем $LM \parallel KN$, тогда $\angle MLN = 90°$, как угол между биссектрисами смежных углов (см. § 9, пример 2). Поскольку $\angle KNL$ и $\angle MLN$ являются односторонними углами при параллельных ML и KN и секущей LN, то их сумма равна 180°, т. е.

$$\angle KNL + \angle MLN = \angle KNL + 90° = 180°.$$

Следовательно, $\angle KNL = 90°$ и первая часть сформулированного в условии задачи утверждения доказана.

Переходим к доказательству второй части. Биссектрисы внутренних (или внешних) накрестлежащих углов AKL и DLK делят

каждый из них пополам. Так как внутренние накрестлежащие углы равны, то равны будут и их половины, т. е.

$$\angle MKL = \angle KLN.$$

Но углы MKL и KLN в свою очередь являются внутренними накрестлежащими углами для прямых MK и LN и секущей LK; следовательно, $MK \parallel LN$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что середина отрезка прямой, заключенного между двумя параллельными прямыми, есть середина отрезков всех прямых, проходящих через эту точку и заключенных между теми же параллельными прямыми.

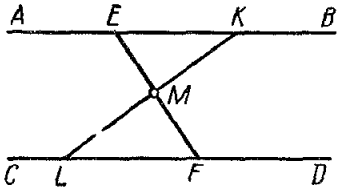


Рис. 14.

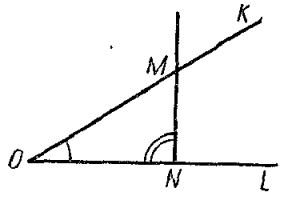


Рис. 15.

Решение. Пусть AB и CD параллельные прямые, точка M — середина отрезка EF, KL — произвольный отрезок, проведенный через точку M (рис. 14). Тогда в треугольниках MKE и MLF стороны ME и MF равны (по условию), углы KME и LMF равны как вертикальные, а углы KEM и LFM — как накрестлежащие. Значит $\triangle MKE = \triangle MLF$ и потому отрезок KM равен отрезку ML, т. е. произвольный отрезок KL в точке M делится пополам. Так как отрезок KL выбран произвольно, то этим же свойством будет обладать и любой другой отрезок прямой, проходящей через точку M, т. е. любой отрезок всего пучка прямых, проходящих через точку M.

Задача 3. Доказать, что перпендикуляр, восстановленный из произвольной точки, взятой на стороне острого угла, обязательно пересекает другую сторону этого угла.

Доказательство. Возьмем на одной из сторон острого угла KOL произвольную точку N и восстановим $NM \perp OL$ (рис. 15).

При пересечении прямой OL прямых OK и NM образовались внутренние односторонние углы KOL и MNO, причем $\angle KOL + \angle MNO < 180°$, так как $\angle KOL < 90°$ (по условию), а $\angle MNO = 90°$ (по построению). Следовательно, прямые OK и NM не являются параллельными по аксиоме о параллельных прямых. Точка их пересечения расположена по ту же сторону секущей OL, по которую расположены внутренние односторонние углы $\angle KOL$ и $\angle MNO$.

Используя приведенное доказательство, можно также доказать, что перпендикуляр к некоторой прямой пересекается со всякой прямой, не перпендикулярной данной. Можно ли доказать это утверждение, если угол KOL будет прямым или тупым?

Задача 4. Прямая, пересекающая две параллельные прямые, наклонена к одной из них под углом $\frac{1}{5}\pi$. Определить остальные углы, образуемые при пересечении данных параллельных той же секущей.

Решение. Пусть, согласно рис. 12, $\angle 1 = \frac{\pi}{5}$. Поскольку $\angle 2$ является смежным с $\angle 1$, то $\angle 2 = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$. Таким образом,

$$\angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = \angle 1 = \frac{1}{5}\pi = 36°,$$

$$\angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = \angle 2 = \frac{4}{5}\pi = 144°.$$

Упражнения. 1. Доказать, что два перпендикуляра, восстановленные к каждой из сторон произвольного угла, пересекаются.

2. Доказать, что неограниченно продолженная прямая линия не может не пересекать хотя бы одной стороны произвольно взятого угла, лежащего в той же плоскости, если она проходит через точку, находящуюся внутри него.

§ 11. Многоугольники

Многоугольник — фигура, образованная на плоскости замкнутой ломаной линией. Говорят также, что многоугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией. Звенья ломаной называются сторонами многоугольника. Точки, в которых сходятся два соседних звена, называются *вершинами* многоугольника. Углы, внутренняя область которых принадлежит многоугольнику и которые составлены двумя соседними сторонами, называются *внутренними* углами многоугольника. Углы, смежные с внутренними углами многоугольника, называются его *внешними* углами, т. е. внешний угол — это угол, образованный стороной многоугольника и продолжением соседней стороны.

Каждому внутреннему углу ставится в соответствие только один внешний угол многоугольника.

Сумма длин всех сторон многоугольника называется его *периметром* и обозначается буквой P или $2p$, где p — полусумма всех его сторон (*полупериметр*).

Многоугольник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от любой своей стороны, неограниченно продолженной.

Простым многоугольником называется такой многоугольник, контур которого не имеет самопересечений.

Если стороны многоугольника имеют самопересечения (рис. 16), он называется *непростым* (звездчатым).

Сумма внутренних углов всякого простого многоугольника равна $\pi(n-2)$ радианов, т. е. $2d(n-2)$.

Сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 2π радианов, т. е. $4d$.

Два многоугольника называются равными, если их можно совместить наложением.

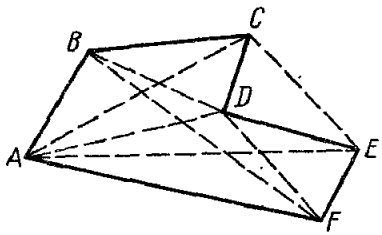


Рис. 16.

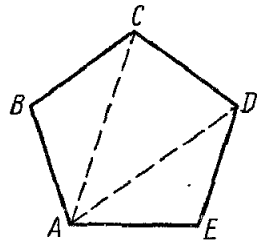


Рис. 17.

В зависимости от числа углов (сторон) многоугольник называется треугольником, четырехугольником, пятиугольником и т. д.

Многоугольник называется *правильным*, если все его стороны и все углы равны между собой.

Многоугольник также часто называют n-угольником, где n — число сторон (вершин, углов). Очевидно, что $n \geqslant 3$.

Каждый угол правильного многоугольника равен $\frac{n-2}{n}\pi$ радианов, например угол правильного треугольника* $\frac{3-2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} = 60°$, правильного четырехугольника (квадрата) $\frac{4-2}{4}\pi = \frac{\pi}{2} = 90°$, правильного пятиугольника $\frac{5-2}{5}\pi = \frac{3\pi}{5} = 108°$, правильного шестиугольника $\frac{6-2}{6}\pi = \frac{2\pi}{3} = 120°$ и т. д.

---

* При измерении углов в радианах слово «радиан», как уже отмечалось в § 9, обычно не пишут.

Диагоналями многоугольника называются отрезки, соединяющие две вершины многоугольника, не принадлежащие одной его стороне.

В вогнутом многоугольнике отрезок, соединяющий две несоседние вершины, может оказаться вне его (рис. 16).

Для всякого n-угольника число N его диагоналей определяется по формуле:

$$N = \frac{n(n-3)}{2},$$

т. е. равно числу сочетаний из n элементов по 2 без числа сторон многоугольника:

$$C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Задача 1. Определить углы, образованные диагоналями и сторонами правильного пятиугольника, выходящими из одной его вершины.

Решение. Пусть диагонали и стороны пятиугольника выходят из вершины A (рис. 17). Поскольку $\triangle ABC$ равнобедренный ($AB = BC$) и $\angle B = 108°$, то

$$\angle BAC = \angle CAB = \frac{180° - 108°}{2} = 36°.$$

Аналогично $\angle DAE = \angle EAD = 36°$;

$$\angle DAC = 108° - \angle BAC - \angle DAE = 108° - 72° = 36°.$$

Если биссектрисы всех углов многоугольника пересекаются в одной точке O, то в него можно вписать окружность. Центром вписанной в данный многоугольник окружности будет точка O.

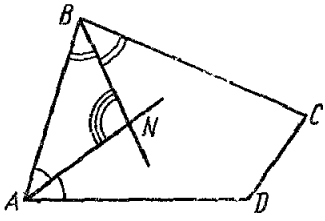


Рис. 18.

Если перпендикуляры, восстановленные к серединам всех сторон многоугольника, пересекаются в одной точке O_1, то вокруг него можно описать окружность и ее центром будет точка O_1.

Для правильных многоугольников точка пересечения биссектрис всех углов и точка пересечения перпендикуляров, восстановленных к серединам всех сторон, совпадают.

Задача 2. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике угол между биссектрисами двух прилежащих углов равен полусумме двух других углов.

Доказательство. Пусть биссектрисы углов A и B, прилежащих к стороне AB, пересекаются в точке N (рис. 18). Тогда,

поскольку для любого четырехугольника $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то из $\triangle ANB$ находим, что

$$\angle ANB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 180° - \frac{360° - (\angle C + \angle D)}{2} = \frac{\angle C + \angle D}{2},$$

а это, именно, и требовалось доказать.

Задача 3. Доказать, что выпуклый четырехугольник с разными углами имеет хотя бы один тупой угол.

Доказательство. Обозначим внутренние углы рассматриваемого четырехугольника через α, β, γ, δ, а внешние — через α_1, β_1, γ_1, δ_1.

Предположим, что внутренние углы рассматриваемого четырехугольника не все равны между собой и что среди них нет тупых, т. е.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta < 2\pi.$$

Определим при этом предположении сумму внешних углов $\alpha_1 = \pi - \alpha$, $\beta_1 = \pi - \beta$, $\gamma_1 = \pi - \gamma$, $\delta_1 = \pi - \delta$:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 4\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) > 2\pi.$$

Но сумма внешних углов всякого выпуклого многоугольника равна 2π. Следовательно, сделанное предположение неверно, т. е. рассматриваемый четырехугольник имеет хотя бы один тупой угол.

Останется ли верным это доказательство, если все углы четырехугольника будут равны между собою?

Задача 4. Могут ли стороны четырехугольника относиться как 2 : 7 : 11 : 21?

Решение. Четырехугольник с данным отношением сторон не существует, так как при любой единице измерения m получаем, что сумма его трех сторон $2m$, $7m$, $11m$ меньше четвертой стороны $21m$ и поэтому рассматриваемая ломаная линия, которой является четырехугольник, не может быть замкнутой.

Задача 5. Определить стороны четырехугольника, если они относятся между собой как 2 : 4 : 5 : 7, а периметр четырехугольника равен 108 *см*.

Решение. Обозначим единицу измерения через x, тогда стороны четырехугольника соответственно равны $2x$, $4x$, $5x$, $7x$, а периметр $P = 2x + 4x + 5x + 7x = 18x$. По условию задачи $P = 18x = 108$ *см*, откуда $x = 6$ *см*. Таким образом, стороны данного четырехугольника соответственно равны 12, 24, 30, 42 *см*.

Задача 6. Четырехугольник разделен диагональю на два треугольника, периметры которых $P_1 = 25$ *см* и $P_2 = 27$ *см*. Периметр

P четырехугольника равен 32 *см*. Найти длину проведенной диагонали.

Решение. Обозначим длину диагонали через x. Сумма периметров, полученных при проведении диагонали треугольников, равна периметру четырехугольника, сложенному с удвоенной длиной диагонали, т. е. $P_1 + P_2 = P + 2x$.

Следовательно,

$$x = \frac{P_1 + P_2 - P}{2} = \frac{25\ см + 27\ см - 32\ см}{2} = 10\ см.$$

Ответ: Длина диагонали равна 10 *см*.

§ 12. Треугольники

Треугольником называется фигура, образованная замкнутой ломаной, состоящей из трех звеньев, т. е. треугольник — это n-угольник при $n = 3$.

Для краткости слово треугольник обозначается символом $\triangle$. Вершины треугольника обычно обозначают большими буквами латинского алфавита, а противоположные им стороны теми же самыми малыми буквами; например, вершины A, B, C и противоположные им стороны a, b, c.

Если все три угла треугольника острые, то он называется *остроугольным*, а если один из его углов тупой, то — *тупоугольным*.

Треугольник, имеющий прямой угол, называется *прямоугольным*; две его стороны, образующие прямой угол, называются *катетами*, а третья сторона (лежащая против прямого угла) — *гипотенузой*.

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны имеют одинаковую длину, и *равносторонним*, если все его стороны по длине равны.

Равные стороны равнобедренного треугольника обычно называют *боковыми* сторонами, а третью его сторону — *основанием*. Равносторонний треугольник является вместе с тем и *равноугольным* (и наоборот).

Во всяком треугольнике сумма углов равна 180° или π радианов.

Всякий внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то и третьи углы равны.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90° или $\frac{\pi}{2}$ радианов.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен 45°, или $\frac{\pi}{4}$ радианов.

Если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 30°, то лежащий против этого угла катет составляет половину гипотенузы (эту теорему и обратную ей предлагается доказать).

Для сторон всякого треугольника имеют место соотношения:

$$a < b + c, \quad a > b - c \text{ или } a > c - b,$$
$$b < a + c, \quad b > a - c \text{ или } b > c - a,$$
$$c < a + b, \quad c > a - b \text{ или } c > b - a,$$

т. е. всякая сторона треугольника меньше суммы, но больше разности двух других сторон.

Задача 1. Доказать, что сумма попарных произведений сторон произвольного треугольника больше половины суммы их квадратов*.

Доказательство. Возводя в квадрат левые и правые части неравенств

$$a > b - c, \quad b > a - c, \quad c > a - b,$$

имеем:

$$a^2 > b^2 - 2bc + c^2,$$
$$b^2 > a^2 - 2ac + c^2,$$
$$c^2 > a^2 - 2ab + b^2.$$

Складывая полученные неравенства и приводя подобные члены, находим:

$$ab + ac + bc > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен $\frac{\pi}{6}$, а сумма гипотенузы с катетом, лежащим против данного угла, равна 27,3 *см*. Определить гипотенузу.

Решение. Обозначим катет, лежащий против данного угла, через x. Тогда гипотенуза составит $2x$. По условию задачи $x + 2x = 27{,}3$ *см*, откуда $x = 9{,}1$ *см*.

---

* Под возведением в степень некоторого отрезка (стороны, высоты, медианы и т. д.) понимается возведение в эту же степень числа, выражающего его длину.

Ответ: Гипотенуза рассматриваемого треугольника равна 18,2 *см*.

Задача 3. В равнобедренном треугольнике сумма внутренних углов с одним из внешних составляет $\frac{4}{3}\pi$. Определить углы треугольника.

Решение. а) Пусть в $\triangle ABC$, где AB — основание, $AC = BC$, углы при основании равны x, угол при вершине y, а внешний угол при вершине равен z. Тогда $2x + y + z = \frac{4}{3}\pi$, $y + z = \pi$; следовательно, $2x + \pi = \frac{4}{3}\pi$, $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

б) Пусть z — внешний угол при основании. Тогда $2x + y + z = \frac{4}{3}\pi$, $2x + y = \pi$; следовательно, $z = \frac{4}{3}\pi - \pi = \frac{\pi}{3}$, что невозможно, так как внешний угол при основании равнобедренного треугольника всегда тупой. Таким образом, искомые углы равны $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$.

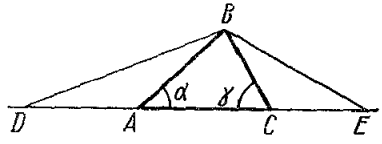


Рис. 19.

Задача 4. В треугольнике ABC сторона AC продолжена за точку A на длину $AD = AB$ и за точку C на длину $CE = BC$. Точки E и D соединены с точкой B. Определить углы $\triangle DBE$, если известны углы $\triangle ABC$ (рис. 19).

Решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, тогда $\angle BAD = \pi - \alpha$, $\angle BCE = \pi - \gamma$. Поскольку треугольники ABD и BCE равнобедренные, то

$$\angle BDA = \angle ABD = \frac{\pi - \angle BAD}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle BEC = \angle CBE = \frac{\pi - \angle BCE}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

§ 13. Соотношения между элементами треугольника

В произвольном треугольнике:

1. *Квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на проекцию другой стороны на нее* (рис. 20):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab_a = a^2 + b^2 - 2ba_b.$$

2. *Квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон на проекцию другой стороны на нее* (рис. 21):

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab_a = a^2 + b^2 + 2ba_b.$$

Теорема Пифагора. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов* (рис. 22):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

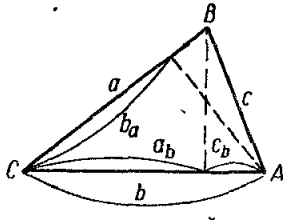


Рис. 20.

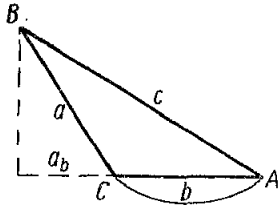


Рис. 21.

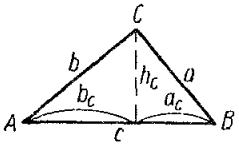


Рис. 22.

Замечание. Если угол C прямой, то проекция одного из катетов на второй равна нулю: $a_b = b_a = 0$; внося эти значения в одну из предыдущих формул, получим теорему Пифагора.

Перпендикуляр h_c, опущенный из вершины прямого угла треугольника на его гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная величина между всей гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы (рис. 22):

$$\frac{h_c}{a_c} = \frac{b_c}{h_c}; \quad \frac{a}{c} = \frac{a_c}{a}; \quad \frac{b}{c} = \frac{b_c}{b}.$$

Квадраты катетов относятся между собой как прилежащие к ним отрезки гипотенузы:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c}{b_c}.$$

Задача 1. Определить вид треугольника, если между его сторонами a, b, c имеет место зависимость $a^n + b^n = c^n$ (n — целое, положительное число).

Решение. При различных значениях n могут иметь место следующие три случая:

а) $n = 1$. Зависимость $a + b = c$ не имеет места ни для какого треугольника;

б) $n = 2$. Зависимость $a^2 + b^2 = c^2$ имеет место лишь для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c;

в) $n > 2$. Предположим, что $a < c$, $b < c$. Тогда $a^{n-2} < c^{n-2}$, $b^{n-2} < c^{n-2}$, следовательно,

$$a^n c^2 < c^n a^2, \quad b^n c^2 < c^n b^2.$$

Складывая полученные неравенства, находим:

$$(a^n + b^n)\, c^2 < (a^2 + b^2)\, c^n.$$

Но по условию задачи $a^n + b^n = c^n$. Поэтому разделив обе части последнего неравенства на $c^n > 0$, получаем $a^2 + b^2 > c^2$; значит, исследуемый треугольник остроугольный.

Можно также применить следующий способ. При $a < c$, $b < c$, $n > 2$, имеем:

$$\frac{a^n}{c^n} < 1, \quad \frac{b^n}{c^n} < 1, \quad \frac{2}{n} < 1.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{a^n}{c^n}\right)^{\frac{2}{n}} > \frac{a^n}{c^n}, \quad \left(\frac{b^n}{c^n}\right)^{\frac{2}{n}} > \frac{b^n}{c^n}.$$

Складывая полученные неравенства, находим

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} > \frac{a^n + b^n}{c^n} = 1,$$

т. е. $a^2 + b^2 > c^2$. Исследуемый треугольник остроугольный.

В каждом треугольнике против бо́льшей стороны лежит бо́льший угол, а против бо́льшего угла лежит бо́льшая сторона. Против равных сторон лежат равные углы, и наоборот.

Если два угла треугольника равны, то стороны, лежащие против этих углов, также равны (т. е. треугольник является равнобедренным). Угол, лежащий против меньшей стороны треугольника, всегда острый.

В тупоугольном треугольнике наибольшая сторона его лежит всегда против тупого угла.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза всегда больше любого из катетов.

Если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами не равны, то против бо́льшего угла лежит и бо́льшая сторона.

Задача 2. В треугольнике ABC бóльшая сторона BA продолжена на отрезок AD, равный стороне AC, и точка D соединена отрезком прямой с вершиной C. Доказать, что угол BCD — тупой.

Решение. Проведем прямую $AL \parallel DC$ и рассмотрим угол ALB, равный углу BCD (рис. 23).

Тогда $\angle ALB = \angle LAC + \angle LCA$ как внешний угол треугольника ALC; $\angle LAC = \frac{1}{2} \angle BAC$, так как $\angle LAC = \angle ACD$ и $\angle BAC = \angle ACD + \angle ADC = 2 \angle ACD = 2 \angle LAC$, а $\angle LCA$ больше $\angle B$, так как лежит против большей стороны; значит, сумма этих двух углов больше полусуммы углов треугольника, т.е. $\angle LAC + \angle LCA > 90°$; поэтому угол BLA тупой, а следовательно, и равный ему угол BCD тоже тупой.

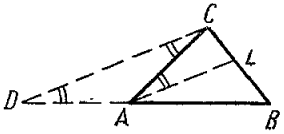


Рис. 23.

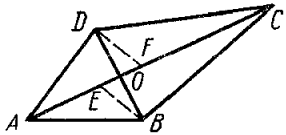


Рис. 24.

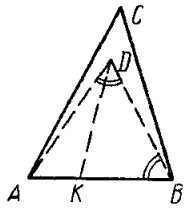


Рис. 25.

Задача 3. Доказать, что если в четырехугольнике суммы квадратов противоположных сторон равны, то диагонали его взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 24). Предположим, что диагонали не перпендикулярны. Проведем $BE \perp AC$ и $DF \perp AC$. Из $\triangle ABO$ и $\triangle DOC$ соответственно получаем:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot EO,$$
$$CD^2 = CO^2 + DO^2 - 2CO \cdot OF.$$

Складывая, получим

$$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 - 2(AO \cdot EO + CO \cdot OF).$$

Аналогично из $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ получим:

$$AD^2 + CB^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + 2(CO \cdot EO + AO \cdot OF).$$

Поскольку правые части полученных равенств не равны, то $AB^2 + CD^2 < AD^2 + CB^2$, что противоречит условию. Следовательно, $AC \perp BD$.

Задача 4. Доказать, что если внутри треугольника ABC можно взять точку D так, что отрезок DA равен стороне AB, то сторона AB меньше стороны AC (рис. 25).

Решение. Проведем прямые BD и CDK, тогда $\sphericalangle BDK > \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle KDA > \sphericalangle DCA$ как внешние углы треугольников BCD и ADC. Значит, $\sphericalangle BDA > \sphericalangle BCA$; но $\sphericalangle BDA = \sphericalangle ABD$, так как лежат в $\triangle ABD$ против равных по условию сторон AB и AD, поэтому $\sphericalangle ABD > \sphericalangle BCA$, и тем более $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA$. Следовательно, в $\triangle ABC$ сторона AB, как лежащая против меньшего угла, меньше стороны AC.

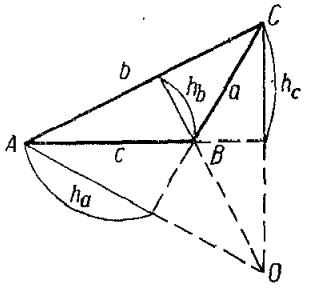


Рис. 26.

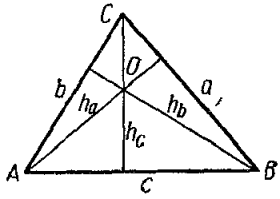


Рис. 27.

1. Высота треугольника. *Высотой* треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на ее продолжение.

В тупоугольном треугольнике две высоты падают на продолжения сторон, а третья находится внутри треугольника.

В остроугольном треугольнике все высоты лежат внутри него.

В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с катетами, а третья опущена на гипотенузу.

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, которая называется *ортоцентром.*

Ортоцентр O тупоугольного треугольника лежит вне треугольника (рис. 26).

Ортоцентр O остроугольного треугольника лежит внутри него (рис. 27).

Ортоцентр прямоугольного треугольника совпадает с вершиной прямого угла.

Высоты треугольника, опущенные на стороны a, b, c, обозначаются соответственно через h_a, h_b, h_c и вычисляются по формулам:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Между высотами h_a, h_b, h_c и радиусами вписанной и вневписанных окружностей r, r_a, r_b, r_c имеют место соотношения:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}; \quad \frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b};$$

$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}; \quad \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c};$$

$$h_a = \frac{2r_b r_c}{r_b + r_c}; \qquad h_b = \frac{2r_a r_c}{r_a + r_c}; \qquad h_c = \frac{2r_a r_b}{r_a + r_b};$$

$$h_a = \frac{r_a(b+c-a)}{a}; \qquad h_b = \frac{r_b(a+c-b)}{b}; \qquad h_c = \frac{r_c(a+b-c)}{c}.$$

Вневписанной в треугольник окружностью называется окружность, к которой одна из сторон треугольника и продолжения двух других сторон его являются касательными (рис. 28).

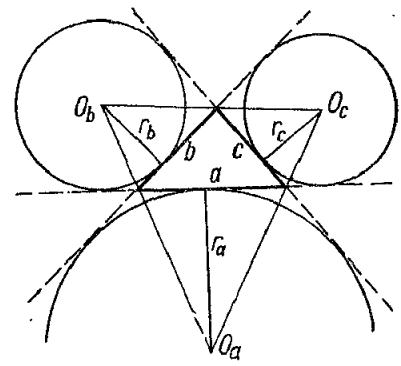


Рис. 28.

2. Медиана треугольника. *Медианой* треугольника называется отрезок, соединяющий произвольную его вершину с серединой противолежащей стороны. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 29). Эта точка всегда находится внутри треугольника, являясь его центром тяжести. Точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от вершины).

Медианы сторон a, b, c обозначаются соответственно через m_a, m_b, m_c и вычисляются по формулам:

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}; \quad m_b = \frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{2};$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}.$$

Сумма квадратов медиан равна трем четвертям суммы квадратов сторон треугольника

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

В прямоугольном треугольнике медиана, опущенная на гипотенузу, равна половине гипотенузы.

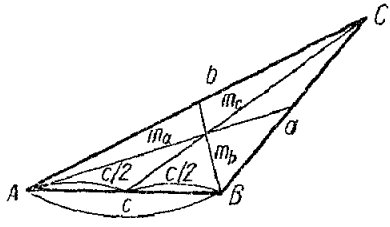


Рис. 29.

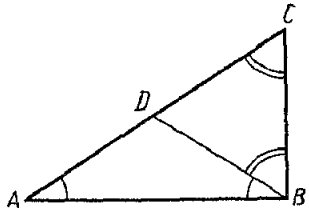


Рис. 30.

Задача 5. Доказать, что если медиана какой-либо стороны произвольного треугольника равна половине этой стороны, то данный треугольник прямоугольный.

Доказательство. Пусть в $\triangle ABC$ проведена медиана BD стороны AC и согласно условию $BD = AD = DC$ (рис. 30). Докажем, что $\angle ABC = 90°$.

Поскольку $\triangle ABD$ — равнобедренный, то $\angle ABD = \angle DAB$, аналогично $\angle DBC = \angle BCD$.

Тогда имеем:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{180° - \angle ADB}{2} + \frac{180° - \angle BDC}{2} =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle BDC) = 90°,$$

так как углы ADB и BDC — смежные и, следовательно,

$$\frac{1}{2}(\angle ADB + \angle BDC) = 90°.$$

Задача 6. Вычислить медиану, опущенную на гипотенузу, если: а) катеты данного прямоугольного треугольника равны 4

и 10 *см*; б) один катет равен 6 *см*, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 4,8 *см*.

Р е ш е н и е. а) Воспользовавшись теоремой Пифагора, вычисляем гипотенузу c по данным катетам $a = 4$ *см*, $b = 10$ *см*:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}\ см.$$

Следовательно, $m_c = \frac{1}{2}c = \sqrt{29}$ *см*, так как медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы.

б) Обозначим отрезки, на которые основание высоты h_c делит гипотенузу c, через $x = b_c$ и $y = a_c$ (рис. 22). Пусть отрезок x прилегает к данному катету $b = 6$ *см*, тогда по теореме о перпендикуляре, опущенном из вершины прямого угла на гипотенузу, получаем

$$x(x + y) = 6^2,$$
$$xy = 4{,}8^2.$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем $\frac{x + y}{y} = \frac{25}{16}$, откуда $y = \frac{16}{9}x$.

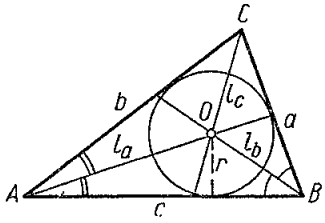


Рис. 31.

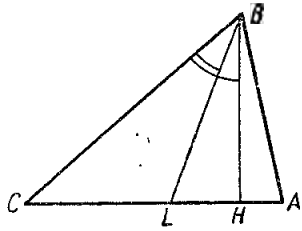


Рис. 32.

Подставляя в первое уравнение, получаем $\frac{25}{9}x^2 = 36$, откуда $\frac{5}{3}x = 6$, $(x > 0)$; следовательно, $x = 3{,}6$ *см*; $y = 6{,}4$ *см*; $c = x + y = 10$ *см*; $m_c = \frac{1}{2}c = 5$ *см*.

3. Биссектриса треугольника. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы любого угла этого треугольника от вершины до пересечения с противоположной стороной. Все три биссектрисы (по количеству углов) треугольника пересекаются в одной точке, лежащей всегда внутри треугольника и являющейся центром вписанной окружности (рис. 31).

В $\triangle ABC$ биссектрисы углов A, B, C, лежащих против сторон a, b, c, обозначаются соответственно через l_a, l_b, l_c и вычисляются по формулам:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

$$l_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)},$$

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Кроме того, биссектрисы могут быть вычислены по формулам:

$$l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]},$$

$$l_b = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]},$$

$$l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]}.$$

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Биссектриса внешнего угла треугольника пересекает продолжение противоположной стороны в такой точке, расстояния которой до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам.

Во всяком треугольнике биссектриса лежит между соответствующими медианой и высотой, т. е.

$$h_a \leqslant l_a \leqslant m_a; \quad h_b \leqslant l_b \leqslant m_b; \quad h_c \leqslant l_c \leqslant m_c.$$

Продолжения биссектрис внутренних углов треугольника проходят через центры вневписанных окружностей, являющихся точками, в которых пересекаются биссектрисы внешних углов этого треугольника (рис. 28).

Задача 7. В треугольнике из вершины угла проведены биссектриса и высота. Доказать, что угол между ними равен полуразности двух других углов.

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ $BC > AB$, BH — высота, BL — биссектриса (рис. 32). Тогда

$$\angle HBL = \angle HBC - \angle LBC = (90° - \angle C) - \frac{180° - (\angle A + \angle C)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A - \angle C),$$

так как $\angle LBC = \frac{\angle B}{2} = \frac{1}{2}(180° - \angle A - \angle C)$.

Задача 8. В $\triangle ABC$ биссектрисы внутренних углов B и C пересекаются в точке O и через эту точку проведена прямая OD параллельно AC до пересечения с BC в точке D и прямая OE параллельно AB до пересечения с BC в точке E. Построить рисунок и доказать, что периметр $\triangle OED$ равен стороне BC.

Решение. $\angle OBE = \angle OBA$, так как BO — биссектриса $\angle ABC$; $\angle BOE = \angle OBA$, как накрестлежащие углы, а потому $\angle OBE = \angle BOE$ и, следовательно, в треугольнике OBE $OE = BE$. Аналогично доказываем, что $OD = DC$. Поэтому

$$P_{OED} = OE + ED + DO = BE + ED + DC = BC.$$

Задача 9. Доказать, что в треугольнике биссектрисы двух внешних углов и третьего внутреннего, не смежного с ними, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ точка D находится на продолжении стороны AB, а точка E — на продолжении AC (рис. 33). Биссектриса внешнего угла DBC — геометрическое место точек, равноотстоящих от сторон BD и BC, биссектриса внешнего угла ECB — геометрическое место точек, равноотстоящих от сторон BC и CE; поэтому точка их пересечения K равно отстоит от сторон BD и CE, а следовательно, и от сторон AD и AE. Значит, точка K лежит на биссектрисе угла A.

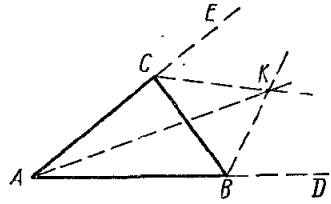


Рис. 33.

4. Центр описанной окружности. Средняя линия треугольника. Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной окружности. В тупоугольном треугольнике эта точка лежит вне треугольника, в прямоугольном треугольнике — на середине гипотенузы, в остроугольном — внутри треугольника.

В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, опущенные на основание, а также перпендикуляр, проведенный через середину основания, совпадают друг с другом.

В равностороннем треугольнике отмеченное совпадение осуществляется для всех сторон.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружности в равностороннем треугольнике совпадают.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины его сторон. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Задача 10. Построить треугольник, зная основания трех его высот.

Решение. Пусть основаниями трех высот некоторого треугольника являются точки L, M, N. Построим треугольник с вершинами в точках L, M и N. Проведя биссектрисы внутренних углов $\triangle LMN$, построим перпендикуляры к ним, проходящие через вершины $\triangle LMN$. Точки пересечения этих перпендикуляров будут вершинами искомого треугольника. Выполнить рисунок.

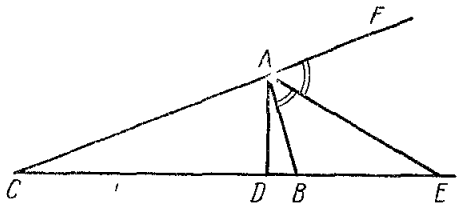


Рис. 34.

Задача 11. В треугольнике ABC высота (относительно стороны BC) составляет половину биссектрисы внешнего угла этого треугольника при вершине A. Найти разность углов B и C.

Решение. На рис. 34 AD — высота, а AE — биссектриса $\angle BAF$. По условию задачи $AD = \frac{1}{2} AE$, поэтому в прямоугольном $\triangle ADE$ угол AED равен 30°.

Далее находим

$$\angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAF = \frac{180° - A}{2} = 90° - \frac{A}{2}.$$

Из $\triangle ABE$ имеем:

$$\angle ABE = 180° - (\angle BAE + \angle AEB) = 180° - \left[\left(90° - \frac{A}{2}\right) + 30°\right]$$

или

$$\angle ABE = 60° + \frac{A}{2}.$$

С другой стороны, $\angle ABE$ смежный с углом B и

$$\angle ABE = 180° - B,$$

тогда

$$60° + \frac{A}{2} = 180° - B,$$

откуда

$$A + 2B = 240°.$$

Теперь находим

$$B - C = (A + 2B) - (A + B + C) = 240° - 180° = 60°.$$

Ответ: $B - C = 60°$.

Задача 12. В $\triangle ABC$ на продолжении стороны BC отложен отрезок CD, равный CA, и точки A и D соединены прямой; прямая CE — биссектриса $\angle ACB$, прямая CF делит отрезок AD пополам. Построить рисунок и доказать, что CF и CE перпендикулярны.

Решение. CF — медиана равнобедренного $\triangle ACD$, а, следовательно, CF — биссектриса $\angle ACD$.

Углы BCA и ACD являются смежными, а биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (см. § 9, пример 2), что и требовалось доказать.

§ 14. Признаки равенства треугольников

Два треугольника равны, если у них соответственно равны:
I. Две стороны и угол, заключенный между ними.
II. Два угла и прилежащая к ним сторона.
III. Два угла и сторона, противолежащая одному из них.
IV. Три стороны.
V. Две стороны и угол, лежащий против большей из них.

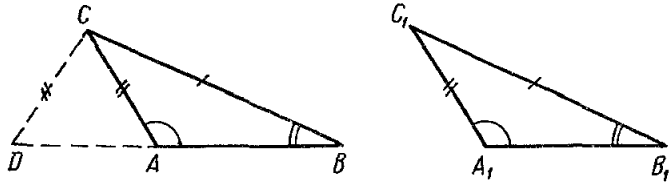


Рис. 35.

Замечание. Если равные углы двух треугольников лежат против меньших сторон этих треугольников, то они могут быть не равны (например, треугольники DBC и $A_1B_1C_1$ на рис. 35).

Два прямоугольных треугольника равны в следующих четырех случаях *.

I. Если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника.

II. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника.

III. Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника.

IV. Если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника.

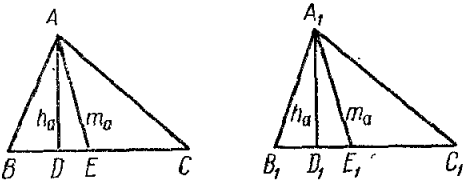


Рис. 36.

Задача 1. Если основание a, высота h_a и медиана m_a одного треугольника соответственно равны основанию, высоте и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. $\triangle ADE = \triangle A_1D_1E_1$ (рис. 36; по катету и гипотенузе); следовательно, $DE = D_1E_1$, значит $DC = D_1C_1$ и $AC = A_1C_1$, поскольку $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ по двум катетам. Так как $BD = BC - DC$, $B_1D_1 = B_1C_1 - D_1C_1$, то $BD = B_1D_1$, следовательно, $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ (по двум катетам); значит, $AB = A_1B_1$.

Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

Задача 2. Доказать, что если две стороны и медиана третьей стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане третьей стороны другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в $\triangle ABC$ дана медиана $BD = m_b$ и стороны a и c, а в $\triangle A_1B_1C_1$ — медиана $B_1D_1 = m_{b_1}$ и стороны a_1 и c_1.

Продолжим обе медианы за точки D и D_1 и отложим на их продолжениях $DE = BD$ и $D_1E_1 = B_1D_1$ (рис. 37). Точку E соединим с точками A и C, а точку E_1 — с точками A_1 и C_1.

Тогда $\triangle ADE = \triangle BDC$ по двум равным сторонам и углу между ними ($\angle ADE = \angle BDC$ как вертикальные углы, $BD = DE$ по построению и $AD = DC$ по условию, поскольку BD медиана). Следовательно, сторона $AE = BC = a$. Аналогично доказываем, что $A_1E_1 = B_1C_1 = a_1$.

---

* Все эти признаки получаем как частный случай признаков для произвольных треугольников, учтя, что для прямоугольных треугольников одно условие выполняется автоматически — прямые углы всегда между собою равны.

Далее, $\triangle ABE = \triangle A_1B_1E_1$ по трем равным сторонам, так как по условию $a = a_1$, $c = c_1$, $2m_b = 2m_{b_1}$. В таком случае AD и A_1D_1 будут соответственно медианами этих треугольников; тогда $AD = A_1D_1$, $DC = D_1C_1$, так как BD и B_1D_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем равным сторонам.

Задача 3. В равнобедренном $\triangle ABC$ из концов основания AC проведены прямые, которые составляют с основанием равные углы и пересекаются в точке D. Построить рисунок и доказать, что треугольники ABD и BCD равны.

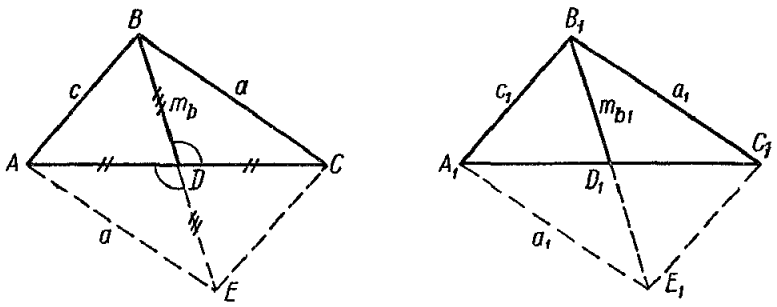


Рис. 37.

Решение. В $\triangle ADC$ (по условию) $\angle DAC = \angle DCA$, а потому противолежащие стороны DA и DC равны. $\triangle ABC$ равнобедренный, значит $BA = BC$ и треугольники ABD и CBD равны по трем соответственно равным сторонам.

Упражнение. Если две стороны и биссектриса угла между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе угла между ними другого треугольника, то такие треугольники равны. Доказать.

§ 15. Подобие треугольников и многоугольников

Если углы одного из двух данных треугольников соответственно равны углам другого, то те их стороны, которые лежат против равных углов, называются *сходственными сторонами*.

Два треугольника называются подобными, если их соответственные углы равны и стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.

I. Признаки подобия треугольников. *Два треугольника подобны,* если:

I. Два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника.

II. Две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны.

III. Три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

Два треугольника являются *подобными*, если стороны одного соответственно параллельны или перпендикулярны сторонам другого.

Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

Высоты подобных треугольников, проведенные к сходственным сторонам, называются *сходственными высотами*.

Аналогично определяются сходственные медианы и сходственные биссектрисы.

2. Признаки подобия прямоугольных треугольников. Признаки подобия прямоугольных треугольников получаем как частный случай из признаков подобия произвольных треугольников, принимая во внимание, что одно условие уже выполнено: прямые углы всегда между собою равны.

Два прямоугольных треугольника подобны, если:

I. Острый угол одного треугольника равен острому углу другого треугольника.

II. Катеты одного треугольника пропорциональны катетам другого треугольника.

III. Гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника.

Для обозначения подобия двух треугольников (а также многоугольников) служит специальный знак $\sim$. Например, если треугольники ABC и MNP подобны, то это кратко обозначают так:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP.$$

Задача 1. Доказать, что расстояние центра описанной вокруг треугольника окружности от стороны вдвое меньше расстояния ортоцентра от вершины противоположного угла.

Решение. $OM \perp BC$, $ON \perp AC$, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр (рис. 38). Далее, $MN \parallel AB$ — как средняя линия, так что $MN = \frac{1}{2} AB$.

По условию задачи ON есть перпендикуляр, проведенный через середину стороны AC, а BP высота, опущенная на эту же сторону AC; следовательно, $ON \parallel BP$; так как $MN \parallel AB$, то углы MNO и PBA равны, как углы с параллельными сторонами. Аналогично доказыва-

ем, что $\angle NMO = \angle QAB$ и тогда (согласно первому признаку подобия треугольников)

$$\triangle MON \sim \triangle AHB.$$

Следовательно,

$$\frac{OM}{MN} = \frac{HA}{AB} = \frac{HA}{2MN},$$

откуда $2OM = HA$, что и требовалось доказать.

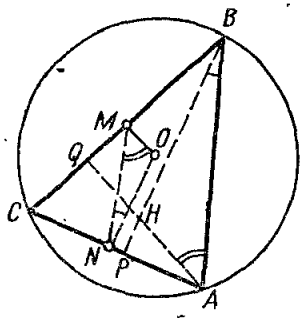


Рис. 38.

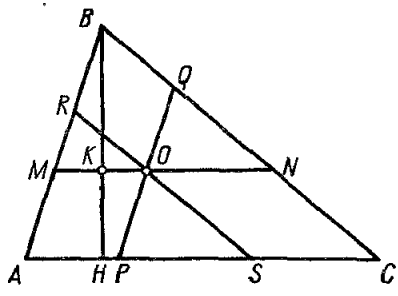


Рис. 39.

Задача 2. В треугольнике ABC стороны $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$. Через точку O пересечения биссектрис внутренних углов треугольника проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Найти длины отрезков этих прямых, заключенных внутри треугольника.

Решение. В треугольнике ABC проведем высоту $BH = h_b$ (рис. 39). По условию задачи $MN \parallel AC$, $PQ \parallel AB$ и $RS \parallel BC$, тогда $\triangle ABC \sim \triangle BMN \sim \triangle CQP \sim \triangle ARS$. Из подобия треугольников ABC и BMN находим

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BK}{BH}$$

или

$$\frac{MN}{b} = \frac{h_b - r}{h_b},$$

где $r = KH$ — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Учитывая, что $r = \frac{s}{p}$, а $h_b = \frac{2s}{b}$, где s — площадь, а p — полупериметр $\triangle ABC$, получим

$$\frac{MN}{b} = 1 - \frac{\frac{s}{p}}{\frac{2s}{b}} = \frac{a+b+c-b}{a+b+c} = \frac{a+c}{a+b+c},$$

откуда

$$MN = \frac{b(a+c)}{a+b+c}.$$

Аналогично находим

$$PQ = \frac{c(a+b)}{a+b+c} \quad \text{и} \quad RS = \frac{a(b+c)}{a+b+c}.$$

Ответ

$$\frac{a(b+c)}{a+b+c}; \quad \frac{b(a+c)}{a+b+c}; \quad \frac{c(a+b)}{a+b+c}.$$

Задача 3. Определить периметр треугольника, вершины которого находятся в основаниях высот остроугольного треугольника со сторонами a, b, c (рис. 40).

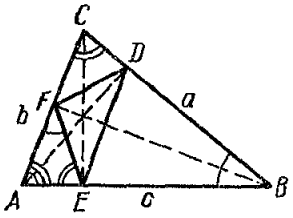


Рис. 40.

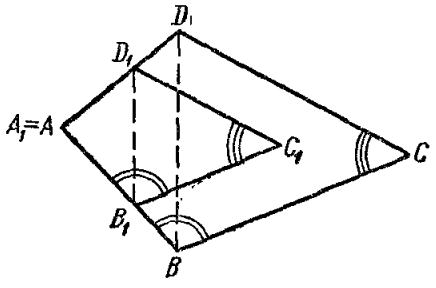


Рис. 41.

Решение. Пусть $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. $\triangle ABC \sim \triangle AFE$, тогда $\frac{FE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ и, следовательно, $FE = \frac{aAE}{c}$, но $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AE$, т. е.

$$AE = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, \quad FE = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}.$$

Аналогично находим

$$FD = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}, \quad DE = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}.$$

Таким образом, после преобразований получаем

$$FE + FD + DE = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \cdot 8p,$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

3. Подобие многоугольников. *Два многоугольника называются подобными, если они имеют соответственно равные углы и сходственные стороны их пропорциональны.*

Задача 4. Доказать, что два выпуклых четырехугольника подобны, если они имеют соответственно равные углы, кроме одной пары, и все пропорциональные стороны, кроме двух смежных.

Решение. Пусть в четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1, \quad BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1.$$

Поскольку сумма внутренних углов всякого четырехугольника равна 2π, то $\angle D = \angle D_1$. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ наложим на четырехугольник $ABCD$ так, чтобы углы A_1 и A совпали (рис. 41). На сторонах AB и AD отметим точки B_1 и D_1.

Соединяя точки B и D, а также точки B_1 и D_1, найдем, что

$$\triangle BDC \sim \triangle B_1D_1C_1$$

(по равному углу между пропорциональными сторонами).

Поэтому $\angle D_1B_1C_1 = \angle DBC$ и соответственно $\angle AB_1D_1 = \angle ABD$, так как по условию $\angle B_1 = \angle B$. Следовательно, $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ (по двум углам).

Поскольку четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ состоят из подобных треугольников, то они подобны.

Таким же образом выполняется доказательство для двух n-угольников, удовлетворяющих условию задачи.

Два подобных многоугольника называются гомотетичными, если они расположены так, что сходственные стороны их параллельны. Подобные многоугольники можно всегда сделать гомотетичными. Прямые, которые соединяют вершины равных углов двух гомотетичных многоугольников, пересекаются в одной точке, называемой *центром подобия (центром гомотетии).*

Отношение сторон двух подобных многоугольников $ABC \ldots MN$ и $A_1B_1C_1 \ldots M_1N_1$ называется *отношением подобия.* Число k в выражении

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \cdots = \frac{MN}{M_1N_1} = k$$

называется *коэффициентом подобия.* Для равных фигур коэффициент подобия равен единице. Центр гомотетии может лежать как внутри, так и вне гомотетических фигур.

Задача 5. Построить пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подобный данному пятиугольнику $ABCDE$ так, чтобы одна из сторон его равнялась данному отрезку m (рис. 42).

Решение. Пусть $A_1B_1 = m$. Проведем прямую, параллельную стороне AB данного многоугольника, и на ней отложим данный отрезок $A_1B_1 = m$. Через точки A и A_1, B и B_1 проведем прямые

до их пересечения в точке O и из нее проведем прямые OC, OD, OE. Из точки A_1 проведем прямую, параллельную AE до ее пересечения с продолжением луча OE. Получим точку E_1. Из точки E_1 проведем $E_1D_1 \parallel ED$, далее аналогично $D_1C_1 \parallel DC$, $C_1B_1 \parallel CB$.

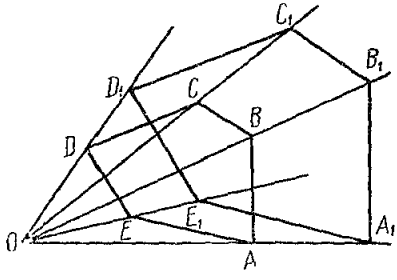


Рис. 42.

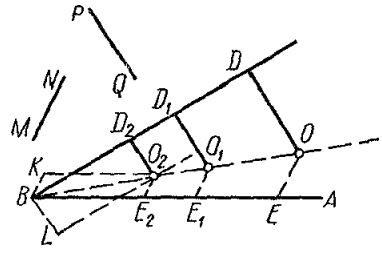


Рис. 43.

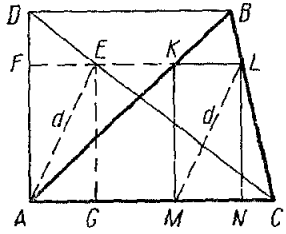


Рис. 44.

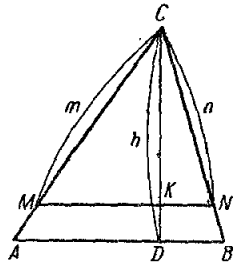


Рис. 45.

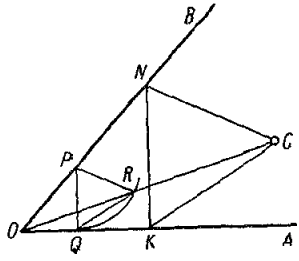


Рис. 46.

Задача 6. Внутри угла ABD найти все такие точки, для которых отрезки, проведенные из каждой искомой точки до сторон угла параллельно данным отрезкам MN и PQ, находились бы в данном отношении $m : n$.

Допустим, что уже найдены две точки O и O_1 такие, что $OE : OD = O_1E_1 : O_1D_1 = m : n$, причем $OE \parallel MN$, $O_1E_1 \parallel MN$, $OD \parallel PQ$, $O_1D_1 \parallel PQ$. Очевидно, что четырехугольники $BDOE$ и $BD_1O_1E_1$ подобны. Центром их подобия будет точка B. Следовательно, точки O, O_1, B лежат на одной прямой. Поэтому все искомые точки лежат на луче OB. Чтобы построить этот луч, надо найти какую-нибудь одну его точку. Для этого проводим из точки B лучи, параллельные к MN и PQ, и на них откладываем отрезки $BK = xm$ и $BL = xn$, где x — произвольная единица измерения (рис. 43).

Из точек K и L проведем $KO_2 \parallel AB$ и $LO_2 \parallel BD$. Точка их пересечения O_2 и есть одна из искомых точек, так как $E_2O_2 : D_2O_2 = BK : LB = xm : xn = m : n$. Все остальные искомые точки составляют луч OB.

Задача 7. В данный треугольник ABC вписать прямоугольник, имеющий данную диагональ d.

Решение. Через одну из вершин, например, B треугольника ABC проведем прямую, параллельную основанию AC до пересечения ее в точке D с перпендикуляром к AC, восстановленным из точки A (рис. 44). Из вершины A прямоугольного треугольника ACD радиусом, равным d, делаем засечку E на гипотенузе CD. Через точку E проведем прямые EG и FE, параллельные AD и основанию AC. Прямую FE продолжаем до ее пересечения со сторонами AB и BC в точках K и L. Из точек K и L опускаем $KM \perp AC$ и $LN \perp AC$.

Прямоугольник $KLMN$ — искомый. Действительно, $\triangle ADC \sim \triangle FDE$, а $\triangle ABC \sim \triangle KBL$, следовательно,

$$\frac{FE}{AC} = \frac{DF}{AD}; \quad \frac{KL}{AC} = \frac{DF}{AD},$$

так как отрезки DF и DA соответственно равны высоте $\triangle KBL$ и $\triangle ABC$. Отсюда

$$\frac{FE}{AC} = \frac{KL}{AC}, \text{ т. е. } KL = FE,$$

а тогда $ML = AE = d$.

Задача будет иметь два решения, если окружность с центром в A и радиусом $r = d$ пересечет гипотенузу DC в двух точках, одно решение — если указанная окружность будет лишь касаться DC. Решения не будет, если данная диагональ d меньше высоты, опущенной из точки A на гипотеиузу DC.

Задача 8. Построить треугольник, если дан один из его углов, отношение сторон, заключающих этот угол, и высота, опущенная из вершины этого угла.

Решение. Пусть в искомом треугольнике ABC $AC : BC = m : n$, где m и n — данные числа или отрезки. Предполагаем, что дан угол C. Построив угол, равный данному, отложим на его сторонах отрезки m и n. Полученные точки M и N соединяем (рис. 45).

В $\triangle MCN$ из вершины C опустим высоту CK. На прямой CK от точки C отложим данную высоту $h = CD$. Через точку D проведем $AB \parallel MN$. Ясно, что $\triangle MCN \sim \triangle ACB$, так как по построению $MN \parallel AB$; следовательно,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{MC}{CN} = \frac{m}{n}.$$

Задача 9. Дан угол AOB и внутри него точка C. Найти на стороне OB точку N, равноудаленную от точки C и от прямой OA.

Решение. Из произвольной точки P, лежащей на стороне OB, опустим $PQ \perp OA$. Проведем прямую OC. Из точки P, как из центра, радиусом PQ сделаем на OC засечку R. Соединим точки P и R. Далее через точку C проведем $CN \parallel PR$ (рис. 46). Точка N — искомая. Действительно, опустив $NK \perp OA$, получаем

$$\triangle NKC \sim \triangle PQR,$$

но $PQ = PR$ по построению, следовательно, $NK = NC$.

§ 16. Понятие о площади и ее измерении

Площадь — одна из основных математических величин. Она характеризует геометрические фигуры как на плоскости, так и на поверхностях.

Площадью плоской замкнутой фигуры называется величина части плоскости, находящейся внутри этой фигуры.

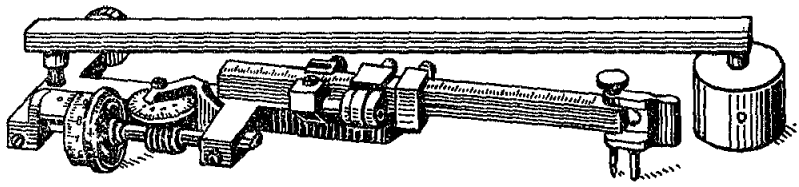


Рис. 47.

Единицей измерения площади плоской фигуры принято считать квадрат со стороной, равной единице длины (единичный квадрат). При измерении площади, ей приводят в соответствие некоторое число, равное количеству единиц измерения площади. При этом равным фигурам соответствуют и равные числа, измеряющие их площади. Кроме того, считают, что число, соответствующее площади некоторой фигуры, которая состоит из нескольких частей, равно сумме чисел, соответствующих площадям этих частей.

Измерение площадей треугольников и многоугольников основано на возможности построения равных им по площади (равновеликих) прямоугольников. В случае соизмеримости прямоугольника с единичным квадратом, площадь его выражается *рациональным* числом, а в случае несоизмеримости — *иррациональным*.

Площадь произвольной ограниченной плоской фигуры определяется как общий предел площадей описанных и вписанных в нее

многоугольников, наибольшие стороны которых по длине стремятся к нулю.

Если указанные пределы существуют и равны между собой, то фигура называется *квадрируемой*, т. е. имеющей *площадь*.

Для приближенного вычисления площадей плоских фигур (например, при работах с топографической картой, планами, при раскройке материала и т. д.) сконструирован прибор, называемый *планиметром* (рис. 47).

Для этой же цели Архимед предложил вычертить заданную фигуру на однородном материале одинаковой толщины (например, на тонком плотном картоне), вырезать ее, взвесить на точных весах, а затем взвесить единичный квадрат, вырезанный из того же материала, и разделить первое число на второе.

§ 17. Площадь треугольника

Для вычисления площади треугольника можно воспользоваться одной из следующих формул:

1. $S = \frac{1}{2} bh_b$,

где b — основание треугольника, h_b — соответствующая высота.

2. $S = \frac{1}{2} ab \sin C$,

где a и b — стороны, C — угол между ними.

3. $S = pr$,

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, r — радиус вписанной окружности.

4. $S = \frac{abc}{4R}$,

где a, b, c — стороны, R — радиус описанной окружности.

5. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона),

где a, b, c — стороны, p — полупериметр.

Площадь произвольного треугольника может быть вычислена также по его высотам h_a, h_b, h_c (см. § 13):

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}},$$

по высотам и полупериметру:

$$S = \frac{p}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}},$$

по высотам и радиусу описанной окружности:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{2h_a h_b h_c R},$$

по высотам и радиусу вписанной окружности:

$$S = \frac{r}{\sqrt{3}}(h_a + h_b + h_c),$$

по радиусам вписанной и вневписанных окружностей:

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c},$$

а также по формулам:

$$S = r_a(p - a) = r_b(p - b) = r_c(p - c),$$

$$S = \frac{a r_b r_c}{r_b + r_c} = \frac{b r_a r_c}{r_a + r_c} = \frac{c r_a r_b}{r_a + r_b}.$$

Площади подобных треугольников относятся как квадраты их сходственных линейных элементов: сторон, высот, медиан, биссектрис и т. д. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты их сходственных сторон или диагоналей.

Площади двух треугольников, имеющих по равному углу, относятся как произведения сторон, заключающих эти углы, что непосредственно следует из формулы 2.

Задача 1. В треугольнике ABC основаниями биссектрис являются точки D, E, F. Найти отношения площадей $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ (рис. 48).

Решение. Поскольку в $\triangle ABC$ и $\triangle DBF$ общий $\angle B$, то

$$\frac{S_{DBF}}{S_{ABC}} = \frac{BF \cdot BD}{AB \cdot BC}.$$

Далее, по свойству биссектрисы $\angle C$ получаем

$$\frac{BF}{AF} = \frac{AC}{BC},$$

откуда

$$\frac{BF}{AB} = \frac{BF}{AF + BF} = \frac{BC}{AC + BC}.$$

Аналогично

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC}.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{DBF}}{S_{ABC}} = \frac{BC \cdot AB}{(AC + BC)(AB + AC)} = \frac{ac}{(a + b)(b + c)},$$

где как обычно введены обозначения $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Аналогично

$$\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{ab}{(a + c)(b + c)}; \quad \frac{S_{EAF}}{S_{ABC}} = \frac{bc}{(a + b)(a + c)}.$$

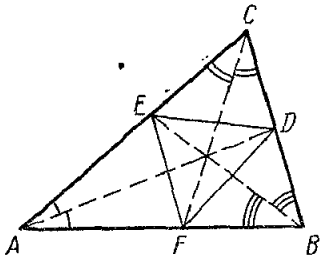


Рис. 48.

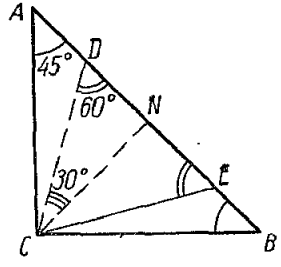


Рис. 49.

Но

$$S_{DEF} = S_{ABC} - S_{FBD} - S_{DCE} - S_{EAF},$$

следовательно,

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{ab}{(a + c)(b + c)} - \frac{ac}{(a + b)(b + c)} - \frac{bc}{(a + b)(a + c)} = \frac{2abc}{(a + b)(a + c)(b + c)}.$$

Задача 2. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой c вписан равносторонний треугольник так, что его сторона лежит на гипотенузе, а вершина совпадает с вершиной прямого угла C. Определить отношение площади вписанного треугольника к площади прямоугольного треугольника.

Решение. Пусть $\triangle ABC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = c$; $\triangle DCE$ — равносторонний вписанный треугольник; CN — их общая высота (рис. 49).

Из $\triangle ACN$, учтя, что он также есть равнобедренный прямоугольник, находим

$$CN = AN = \frac{c}{2}.$$

Из прямоугольного $\triangle DCN$ получаем

$$CN = \frac{DC\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$DC = \frac{2CN}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

В таком случае

$$S_{DCE} = 2S_{DCN} = \frac{\sqrt{3}}{4} DC^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} c^2,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CN \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{4}$$

и, следовательно,

$$\frac{S_{DCE}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{12} c^2 : \frac{c^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

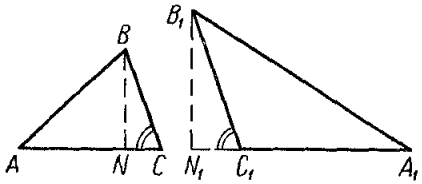


Рис. 50.

Задача 3. Доказать, что если в двух треугольниках сумма двух углов равна 180°, то площади их относятся как произведения сторон, прилегающих к этим углам.

Решение. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle BCA + \angle B_1C_1A_1 = 180°$.

Будем считать, что $\angle BCA < 90°$.

Проведем высоты BN и B_1N_1, тогда (рис. 50)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot BN}{A_1C_1 \cdot B_1N_1}.$$

Но $\angle BCA = \angle B_1C_1N_1$, так как

$$\angle B_1C_1N_1 + \angle B_1C_1A_1 = 180°$$

и по условию задачи

$$\angle BCA + \angle B_1C_1A_1 = 180°.$$

Значит,

$$\triangle BCN \sim \triangle B_1C_1N_1.$$

Таким образом,

$$\frac{BN}{B_1N_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

и, следовательно,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot BN}{A_1C_1 \cdot B_1N_1} = \frac{AC \cdot BC}{A_1C_1 \cdot B_1C_1},$$

что и требовалось доказать.

Задача 4. Площадь данного треугольника разделить пополам прямой, параллельной основанию.

Решение. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник, $KL \parallel AC$, $S_{KBL} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

$\triangle KBL \sim \triangle ABC$, следовательно,

$$\frac{BK^2}{AB^2} = \frac{S_{KBL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}, \text{ т. е. } BK = \frac{AB\sqrt{2}}{2}.$$

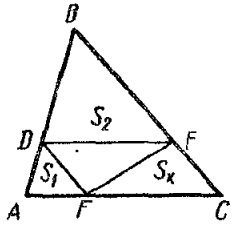


Рис. 51.

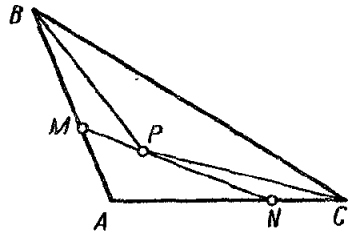


Рис. 52.

Таким образом, задача приводится к построению отрезка BK по данному отрезку AB с учетом полученной формулы. Построим квадрат со стороной AB. Отрезок BK будет равен половине диагонали этого квадрата. Отложив от вершины B треугольника ABC отрезок BK, проводим $KL \parallel AC$. Выполнить рисунок.

Задача 5. На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка D и из нее проведены $DE \parallel AC$ и $DF \parallel BC$. Определить площадь треугольника CEF, если площади треугольников ADF и BDE соответственно равны S_1 и S_2.

Решение. Обозначим площадь искомого $\triangle CEF$ через S_x (рис. 51).

Из подобия треугольников ADF и DBE (каждый из которых подобен данному треугольнику ABC) находим:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{DE}{AF}\right)^2 = \left(\frac{FC}{AF}\right)^2. \quad (1)$$

Высоты треугольников ADF и FEC относительно сторон AF и FC равны между собой, так как $DE \parallel AC$. Тогда

$$\frac{S_x}{S_1} = \frac{FC}{AF}. \quad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), получаем

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{S_x}{S_1}\right)^2,$$

откуда и находим площадь искомого $\triangle CEF$:

$$S_x = \sqrt{S_1 S_2}.$$

Задача 6. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N, а на прямой MN точка P, так что

$$\frac{BM}{MA} = \frac{AN}{NC} = \frac{MP}{PN}.$$

Доказать, что площадь треугольника BPC в два раза больше площади треугольника AMN (рис. 52).

Решение. Пусть

$$\frac{BM}{MA} = \frac{AN}{NC} = \frac{MP}{PN} = k,$$

тогда

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BM + MA}{AM} = k + 1; \quad \frac{AC}{AN} = \frac{AN + NC}{AN} = \frac{k+1}{k};$$

$$\frac{MN}{PM} = \frac{k+1}{k}; \quad \frac{MN}{PN} = k + 1$$

и, следовательно, принимая во внимание результаты, сформулированные в начале этого параграфа и полученные при решении задачи 3,

будем иметь:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{AC}{AN} = \frac{(k+1)^2}{k},$$

$$\frac{S_{BMP}}{S_{AMN}} = \frac{BM}{AM} \cdot \frac{PM}{MN} = \frac{k^2}{k+1},$$

$$\frac{S_{CNP}}{S_{AMN}} = \frac{CN}{AN} \cdot \frac{PN}{MN} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Но

$$S_{AMN} + S_{BPC} = S_{ABC} - S_{BMP} - S_{CNP}.$$

В таком случае, разделив обе части этого равенства на S_{AMN} и воспользовавшись найденными выше отношениями площадей, получаем

$$\frac{S_{AMN} + S_{BPC}}{S_{AMN}} = \frac{(k+1)^2}{k} - \frac{k^2}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)^3 - k^3 - 1}{k(k+1)} = 3,$$

откуда $S_{AMN} + S_{BPC} = 3S_{AMN}$, или, после приведения подобных членов,

$$S_{BPC} = 2S_{AMN}.$$

Задача 7. В треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Выполнить рисунок и доказать, что

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Решение. Треугольники ABD и ACE — прямоугольны по условию задачи и имеют общий острый угол A. Следовательно, их площади относятся как произведения сторон, заключающих $\angle A$:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE}.$$

Поскольку же

$$\triangle ABD \sim \triangle ACE,$$

то

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC},$$

следовательно,

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2,$$

что и требовалось доказать.

§ 18. Сводная таблица частных случаев треугольников

Введенные обозначения: a, b, c — стороны треугольника; h_a, h_b, h_c — соответствующие высоты; m_a, m_b, m_c — медианы; α, β, γ — углы; l_a, l_b, l_c — биссектрисы; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей; a' — проекция a на c; b' — проекция b на c; S — площадь треугольника.

Таблица 1

Вид треугольника	Определения, формулы, свойства, соотношения между элементами
Равносторонний	$a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma = 60°$; $h_a = h_b = h_c = m_a = m_b = m_c = l_a = l_b = l_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; $R = 2r$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r_a = r_b = r_c = 3r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Равнобедренный	$a = b$; a и b — боковые стороны, c — основание; $\alpha = \beta$ (углы при основании равны); $h_a = h_b = \frac{2S}{a}$; $h_c = m_c = l_c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$; $S = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2} = \frac{h_a h_c}{\sqrt{4h_c^2 - h_a^2}}$; $R = \frac{a^2}{2h_c}$; $r = \frac{ch_c}{2a + c}$; $r_a = r_b = h_c$; $r_c = \frac{ch_c}{2a - c}$
Прямоугольный	$\gamma = \alpha + \beta = 90°$; a и b — катеты, c — гипотенуза; $c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Пифагора); $a^2 = ca'$, $b^2 = cb'$, $h^2 = a'b'$; $S = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}$ Центр тяжести отстоит от сторон a, b и c на расстоянии $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}a$ и $\frac{1}{3}h$ соответственно; $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}c$; $h_a = b$, $h_b = a$, $h_c = h = \frac{ab}{c}$

Продолжение табл. 1.

Вид треугольника	Определения, формулы, свойства, соотношения между элементами
Равнобедренный прямоугольный	$a = b = \frac{c\sqrt{2}}{2}$; $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$; $S = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{4}$; $m_a = m_b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $m_c = h_c = l_c = \frac{c}{2}$
Прямоугольный с углом в 30°	$a = \frac{c}{2}$, $b = \frac{c\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$; $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$; $S = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}c^2$

§ 19. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

В параллелограмме стороны равны. Любые две противоположные стороны параллелограмма можно считать *основаниями*. Расстояние между основаниями называется *высотой*. Во всяком параллелограмме сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°. Противоположные углы параллелограмма равны. Диагонали параллелограмма в точке их пересечения делятся пополам. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырех сторон. *Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту* (рис. 53):

$$S = ah_a = bh_b.$$

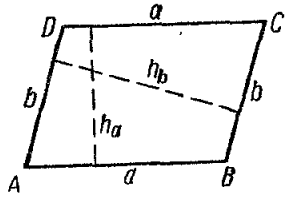


Рис. 53.

Задача 1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AE \perp BD$, $CF \perp BD$ (рис. 54). Доказать, что если $AE = CF$ и $\angle BAC = \angle ACD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

Решение. Поскольку $\angle BAC = \angle ACD$, то $AB \parallel DC$, $\triangle ABE = \triangle CDF$, так как $\angle ABD = \angle CDB$ и по условию $AE = CF$. Следовательно, $AB = CD$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$

две противоположные стороны равны и параллельны, значит этот четырехугольник — параллелограмм.

Задача 2. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и CD отложены равные отрезки AE и CG, а на сторонах BC и AD — равные отрезки BF и DH. Доказать, что четырехугольник $EFGH$ есть также параллелограмм (рис. 55).

Решение. Рассмотрим треугольники BFE и GDH. В этих треугольниках по условию $BF = DH$, $BE = GD$, $\angle B = \angle D$. Следовательно, $\triangle BFE = \triangle GDH$; значит, $EF = GH$. Аналогично доказываем, что $FG = EH$. Таким образом, в четырехугольнике $EFGH$ противоположные стороны попарно равны; следовательно, этот четырехугольник есть параллелограмм.

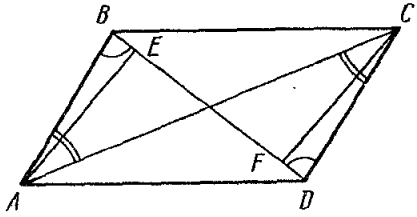


Рис. 54.

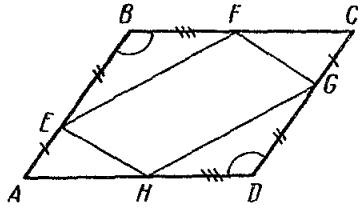


Рис. 55.

Задача 3. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 60°$. Определить отношение длин сторон параллелограмма, если отношение квадратов его диагоналей равно $\frac{19}{7}$. Построить рисунок.

Решение. Имеем:

$$AC^2 = AD^2 + AB^2 + AB \cdot AD,$$
$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - AB \cdot AD.$$

Отсюда, разделив первое уравнение на второе и принимая во внимание, что по условию задачи $\left(\frac{AC}{BD}\right)^2 = \frac{19}{7}$, находим:

$$\left(\frac{AC}{BD}\right)^2 = \frac{AD^2 + AB^2 + AB \cdot AD}{AD^2 + AB^2 - AB \cdot AD} =$$

$$= \frac{\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 + 1 + \frac{AD}{AB}}{\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 + 1 - \frac{AD}{AB}} = \frac{19}{7}.$$

После очевидных преобразований для определения искомого отношения сторон $\frac{AD}{AB}$ получаем квадратное уравнение

$$6\left(\frac{AD}{AB}\right)^2 - 13\left(\frac{AD}{AB}\right) + 6 = 0,$$

из которого находим два возможных решения:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{13 \pm 5}{12}, \text{ т. е. } \frac{AD}{AB} = \frac{3}{2} \text{ или } \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Признаки параллелограмма. Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если выполняется одно из следующих условий:

1. Противоположные стороны попарно равны:

$$AB = CD;\ BC = AD.$$

2. Две противоположные стороны равны и параллельны:

$$AB = CD;\ AB \parallel CD.$$

3. В точке пересечения диагонали делятся пополам.

4. Противоположные углы попарно равны:

$$\angle A = \angle C;\ \angle B = \angle D.$$

5. Противоположные стороны параллельны.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма и имеет свои особые свойства:

1) в прямоугольнике диагонали равны;

2) прямоугольник имеет две оси симметрии, которые проходят через точку пересечения диагоналей параллельно его сторонам.

В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов двух его смежных сторон. Площадь прямоугольника равна произведению его сторон:

$$S = ab.$$

Задача 4. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = CD = a$, $\angle BAC = 60°$. Определить периметр P прямоугольника, его диагонали и площадь. Построить рисунок.

Решение. По условию $\angle BAC = 60°$, тогда $\angle ACB = 30°$ и, следовательно, $AC = 2AB = 2a$; $BD = AC = 2a$; $BC - AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Воспользовавшись теперь полученными результатами, находим:

$$P = 2AB + \overset{\frown}{2BC} = 2a + 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = (2+\sqrt{3})\,a;$$

$$S = AB \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма, а также имеет свои особые свойства:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам;

2) каждая диагональ ромба является его осью симметрии.

Диагонали ромба могут быть вычислены по формулам:

$$d_1 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}; \quad d_2 = 2a\cos\frac{\alpha}{2},$$

где

a — сторона ромба, α — угол ромба.

Сумма квадратов диагоналей ромба равна учетверенному квадрату стороны ромба

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

Площадь ромба может быть вычислена по одной из формул:

$$S = ah; \quad S = a^2\sin\alpha; \quad S = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

Задача 5. Периметр ромба равен $2p$, сумма его диагоналей равна m. Определить площадь ромба.

Решение. Обозначим диагонали ромба через x и y. Тогда, принимая во внимание условие задачи и воспользовавшись теоремой Пифагора, получаем:

$$x + y = m; \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

так как сторона ромба равна одной четверти его периметра $a = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$.

Умножив теперь второе уравнение на 4, перепишем найденный результат в виде

$$\begin{cases} x + y = m, \\ x^2 + y^2 = p^2. \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений определим произведение xy. Для этого возведем первое из уравнений в квадрат и, вычтя из него второе, найдем $2xy = m^2 - p^2$, откуда

$$xy = \frac{m^2 - p^2}{2}.$$

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, следовательно,

$$S = \frac{1}{2} xy = \frac{m^2 - p^2}{4}.$$

Квадратом называется параллелограмм, у которого углы прямые, а стороны равны. Квадрат есть частный вид прямоугольника, а также частный вид ромба. Следовательно, квадрат обладает как свойствами прямоугольника, так и свойствами ромба.

Диагональ квадрата и его сторона связаны между собою одной из следующих формул:

$$d = a\sqrt{2} \text{ или } a = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

Площадь квадрата определяется по формулам:

$$S = a^2; \quad S = \frac{d^2}{2}.$$

Задача 6. В квадрат $ABCD$ вписан другой квадрат $KLMN$, так что вершины его лежат на сторонах первого квадрата, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы по 30°. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного?

Решение. Из $\triangle AKL$ (рис. 56) следует, что

$$AL = \frac{1}{2} KL; \quad AK = \frac{KL\sqrt{3}}{2}.$$

Но в данном случае

$$\triangle AKL = \triangle LMB = \triangle MNC = \triangle KDN$$

(по равным гипотенузам и острым углам), так что

$$AK = LB = MC = ND.$$

Таким образом,

$$AB = AL + LB = AL + AK = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} KL$$

и тогда

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \left(\frac{AB}{KL}\right)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 7. Дан квадрат $ABCD$, причем $BE = EC$, $CF \perp DE$ (рис. 57). Доказать, что площадь заштрихованного на рис. 57 треугольника DCF в пять раз меньше площади данного квадрата.

Доказательство. $S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{DCF}$, так как $\triangle DCF \sim \triangle CEF$ и $CE = \frac{1}{2} DC$, а площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон. Тогда

$$S_{DCE} = S_{DCF} + S_{CEF} = 5S_{CEF} \text{ и } S_{DCF} = \frac{4}{5} S_{DEC}.$$

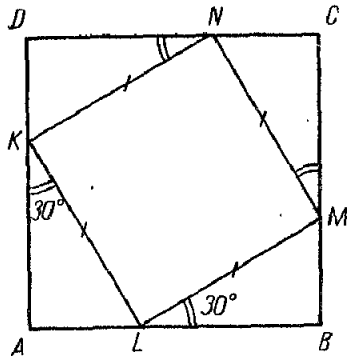


Рис. 56.

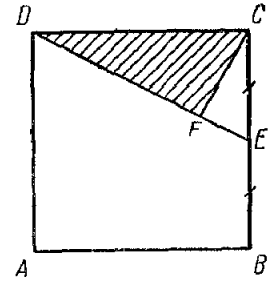


Рис. 57.

Кроме того, $S_{DEC} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

Следовательно,

$$S_{DCF} = \frac{4}{5} S_{DEC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} S_{ABCD} = \frac{1}{5} S_{ABCD}.$$

Задача 8. В ромбе $ABCD$ на сторонах DA и DC отложены равные отрезки DM и DN. Доказать, что треугольник MBN — равнобедренный. Выполнить рисунок.

Решение. $\triangle ABM = \triangle BCN$, так как $AB = BC$, $\angle BAD = \angle BCD$ по условию задачи, $AM = CN$ (как разности равных отрезков). Следовательно, $BM = BN$, т. е. $\triangle MBN$ — равнобедренный.

Задача 9. На двух сторонах треугольника построены вне его квадраты. Доказать, что отрезок прямой, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

Доказательство. Пусть на сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$ (рис. 58). Продолжим медиану BM на отрезок $MN = BM$. Проведем прямые NA и NC. Четырехугольник $ABCN$ — параллелограмм, так как $BM = MN$, $AM = MC$.

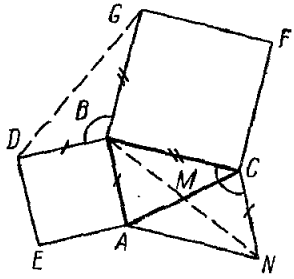


Рис. 58.

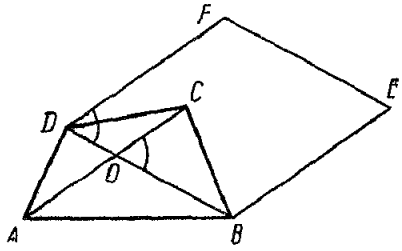


Рис. 59.

Далее, $\angle DBG = \angle BCN$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и $DB = BA = CN$, $BG = BC$; следовательно, $\triangle BDG = \triangle BCN$.

Таким образом,

$$DG = BN = 2BM.$$

Задача 10. Доказать, что площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям произвольного четырехугольника, равна удвоенной площади этого четырехугольника.

Решение. Пусть дан четырехугольник $ABCD$ и построен параллелограмм $BDFE$, так что $DF \parallel BE \parallel AC$, $FE \parallel DB$, $DF = BE = AC$, $FE = DB$ (рис. 59). Поскольку $\angle BOC = \angle ODF$, как соответствующие углы при параллельных DF и AC, то

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin(\angle BOC),$$

$$S_{BDFE} = DF \cdot BD \cdot \sin(\angle BOC).$$

Но $DF = AC$ по условию задачи; следовательно,

$$S_{BDFE} = 2S_{ABCD}.$$

Доказательство можно осуществить также и другим способом. Для этого следует продолжить диагональ AC до ее пересечения с EF в точке N и соединить точку N с точками B и D, а точку C — с точками F и E. (Дополнить рисунок самостоятельно).

Так как диагональ делит каждый параллелограмм на два равных треугольника и по условию $AC = DF = ON$, а следовательно $AO = CN$, то легко доказать, что

$$S_{DONF} = 2S_{DNF} = 2S_{DFC} = 2S_{ADC},$$
$$S_{OBEN} = 2S_{BEN} = 2S_{BEC} = 2S_{ABC}.$$

В таком случае

$$S_{BDEF} = S_{DONF} + S_{OBEN} = 2(S_{ADC} + S_{ABC}) = 2S_{ABCD}.$$

§ 20. Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются *основаниями*, не параллельные стороны — *боковыми сторонами*.

Высотой трапеции называется расстояние между основаниями; отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией трапеции*.

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований и параллельна им. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобочной*. В равнобочной трапеции углы при основании равны. Трапеция, у которой хотя бы один угол прямой, называется *прямоугольной*.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2}h,$$

где a и b — основания, h — высота,
или произведению средней линии на высоту:

$$S = mh,$$

где $m = \frac{a+b}{2}$ — средняя линия.

Площадь равнобочной трапеции может быть вычислена также по формулам:

$$S = c(a - c\cos\gamma)\sin\gamma,$$
$$S = c(b + c\cos\gamma)\sin\gamma,$$

где a и b — основания трапеции, c — боковая сторона, γ — угол между боковой стороной и основанием.

Задача 1. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 *см* и 44 *см*, а непараллельные — 17 *см* и 25 *см*.

Решение. В трапеции $ABCD$ проведем $DE \parallel BC$ (рис. 60); $AE = AB - CD = 44\ см - 16\ см = 28\ см$; $DE = BC = 17\ см$. Пусть DF — высота трапеции. Из $\triangle ADE$ получаем

$$DF = \frac{2}{AE}\sqrt{p(p-AD)(p-DE)(p-AE)} = \frac{1}{14} \times$$

$$\times \sqrt{35 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 18} = 15\ см;$$

$$S = \frac{AB + DC}{2} \cdot DF = \frac{44 + 16}{2} \cdot 15 = 450\ см^2.$$

Задача 2. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найти отрезок ее, ограниченный продолженными диагоналями, если основания трапеции равны $DE = a$, $MN = b$ (рис. 61).

Решение.

$$\triangle DME \sim \triangle AMC,$$
$$\triangle DNE \sim \triangle CNB,$$
$$\triangle MNE \sim \triangle ACE.$$

Отсюда

$$\frac{AC}{a} = \frac{h_1}{h_2};\quad \frac{CB}{a} = \frac{h_1}{h_2};\quad \frac{AC}{b} = \frac{h_1 + h_2}{h_2},$$

поэтому

$$\frac{AC}{b} - \frac{AC}{a} = \frac{h_1 + h_2}{h_2} - \frac{h_1}{h_2} = 1$$

и тогда

$$AC = \frac{ab}{a-b}.\quad \text{Но}\quad AC = CB = \frac{ah_1}{h_2}.$$

Итак,

$$AB = AC + CB = 2AC = \frac{2ab}{a-b}.$$

Задача 3. Доказать, что если прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей, то отрезок, отсекаемый от этой прямой боковыми сторонами, делится точкой пересечения пополам.

Р е ш е н и е. В трапеции $ABCD$ через точку O (рис. 62) пересечения диагоналей AC и BD проведем EF, параллельно основаниям трапеции AB и CD до пересечения с боковыми сторонами AD и BC в точках E и F. Для доказательства достаточно рассмотреть две пары подобных треугольников: DOE и DBA; COF и CAB и учесть, что треугольники DOE и COF; DBA и CAB попарно имеют одинаковую высоту.

З а д а ч а 4. Доказать, что середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагоналей лежат на одной прямой. Выполнить рисунок.

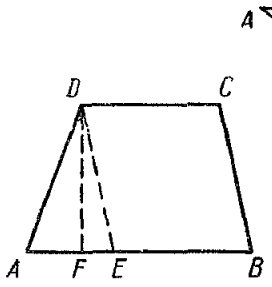


Рис. 60.

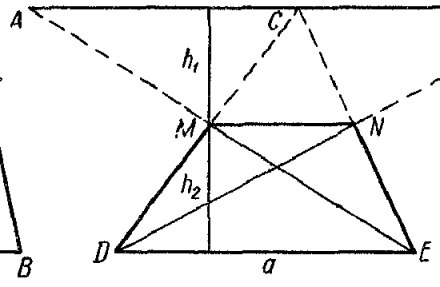


Рис. 61.

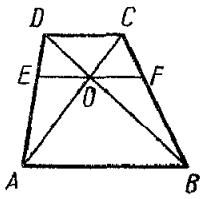


Рис. 62.

Р е ш е н и е. Соединим середину основания трапеции с точкой пересечения диагоналей и продолжим этот отрезок до пересечения со вторым основанием. Чтобы доказать, что второе основание при этом разделится пополам, достаточно рассмотреть две пары подобных треугольников, прилежащих к основаниям.

З а д а ч а 5. Пользуясь только линейкой, разделить трапецию $ABCD$ на две равновеликие части. Выполнить рисунок.

Р е ш е н и е. Продолжим боковые стороны AD и BC трапеции до их пересечения и через полученную точку E и точку пересечения диагоналей F трапеции $ABCD$ проведем прямую EF, которая и разделит данную трапецию на две равновеликие части.

З а д а ч а 6. Два равных равнобедренных прямоугольных треугольника с катетами a расположены так, что катет BC треугольника ABC параллелен гипотенузе A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Вершины B и C соответственно лежат на катетах A_1C_1 и B_1C_1.

Определить площадь трапеции $BCMN$.

Р е ш е н и е. Из $\triangle AMN$ следует, что $MN = AM = a - MC$ (рис. 63). $\triangle A_1C_1B_1 \sim \triangle BCC_1$, поэтому

$$\frac{BC}{A_1B_1} = \frac{CC_1}{A_1C_1}, \text{ т. е. } \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{a - MC\sqrt{2}}{a},$$

откуда

$$MC = a(\sqrt{2} - 1); \quad MN = a(2 - \sqrt{2}).$$

Следовательно,

$$S_{BCMN} = \frac{4\sqrt{2} - 5}{2} a^2.$$

Задача 7. Высота равнобедренной трапеции вдвое меньше боковой стороны. Определить углы трапеции. Выполнить рисунок.

Решение. В трапеции $ABCD$ проведем из точки B высоту $BF \perp AD$, $AB = 2BF$; $\triangle ABF$ — прямоугольный; значит, гипотенуза его в два раза больше катета. Дальнейшее решение задачи не содержит каких-либо трудностей, и читатель сможет легко выполнить его самостоятельно.

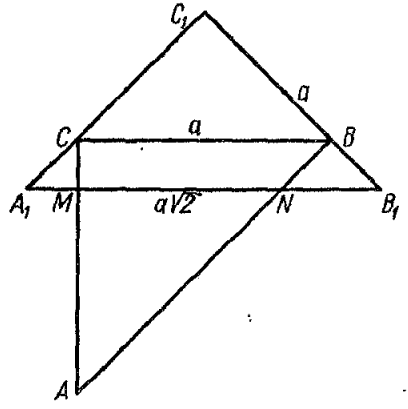


Рис. 63.

Ответ:

$$\angle A = \angle C = 30°;$$
$$\angle B = \angle D = 150°.$$

Задача 8. Доказать, что если биссектрисы углов трапеции, прилегающие к одному основанию, пересекаются на втором основании, то это второе основание равно сумме боковых сторон (рис. 64).

Доказательство. По условию задачи AE и DE биссектрисы углов A и D, так что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Точка E лежит на

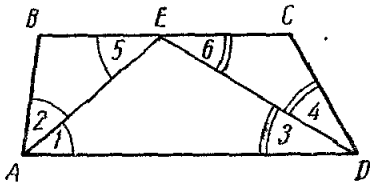


Рис. 64.

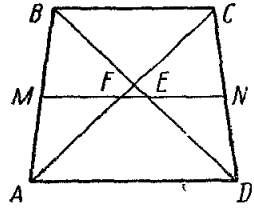


Рис. 65.

основании BC. Но $\angle 1 = \angle 5$, а $\angle 3 = \angle 6$, как углы накрестлежащие при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AE или ED. Следовательно, оба треугольника ABE и CDE — равнобедренные; значит,

$$AB = BE, \quad CD = CE, \quad BC = BE + EC = AB + CD.$$

Задача 9. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен их полуразности (рис. 65).

Доказательство. Проведем среднюю линию MN трапеции $ABCD$. Средняя линия делит диагонали пополам, как средняя линия треугольников ABC и BCD. Следовательно, FE лежит на средней линии; значит, $FE \parallel AD$. Отсюда $ME = \frac{AD}{2}$, $MF = \frac{BC}{2}$, и тогда $FE = ME - MF = \frac{AD - BC}{2}$.

Задача 10. Какая получится фигура, если последовательно соединить середины сторон ромба?

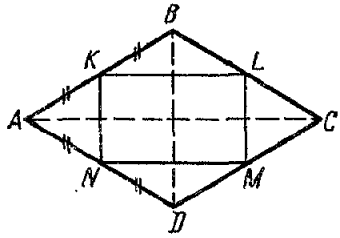


Рис. 66.

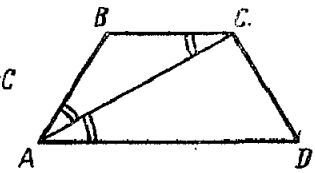


Рис. 67.

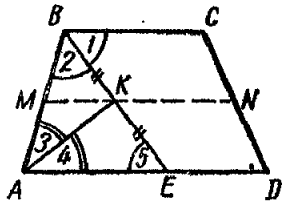


Рис. 68.

Решение. Стороны полученного четырехугольника будут средними линиями соответствующих треугольников, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, а поэтому они будут параллельны диагоналям. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны; следовательно, и смежные стороны полученного четырехугольника тоже; значит, построенный четырехугольник будет прямоугольником (рис. 66).

Задача 11. Доказать, что если биссектриса острого угла A трапеции $ABCD$ и ее диагональ совпадают, то боковая сторона AB равна меньшему основанию BC. Построить рисунок и выполнить доказательство самостоятельно.

Задача 12. Определить углы равнобедренной трапеции, в которой верхнее основание равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне (рис. 67).

Решение. По условию задачи $AB = CD = BC$, $AC \perp CD$. В таком случае $\triangle ABC$ — равнобедренный; следовательно, $\angle BCA = \angle CAB$. Но $\angle A = \angle D$, как углы при основании равнобедренной трапеции, а $\angle CAD = \angle BCA$, как внутренние накрестлежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей AC. Значит, $\angle A = 2\angle CAD$. Далее, по условию $\triangle ACD$ — прямоугольный, так что $\angle CAD + \angle D = 90°$; но так как $\angle D = \angle A$, то $90° = 3\angle CAD$; следовательно, $\angle CAD = 30°$, а тогда $\angle D = \angle A = 60°$, $\angle C = \angle B = 120°$.

Задача 13. Доказать, что биссектрисы углов, прилегающих к одной из боковых сторон трапеции, пересекаются под прямым углом в точке, лежащей на средней линии трапеции (рис. 68).

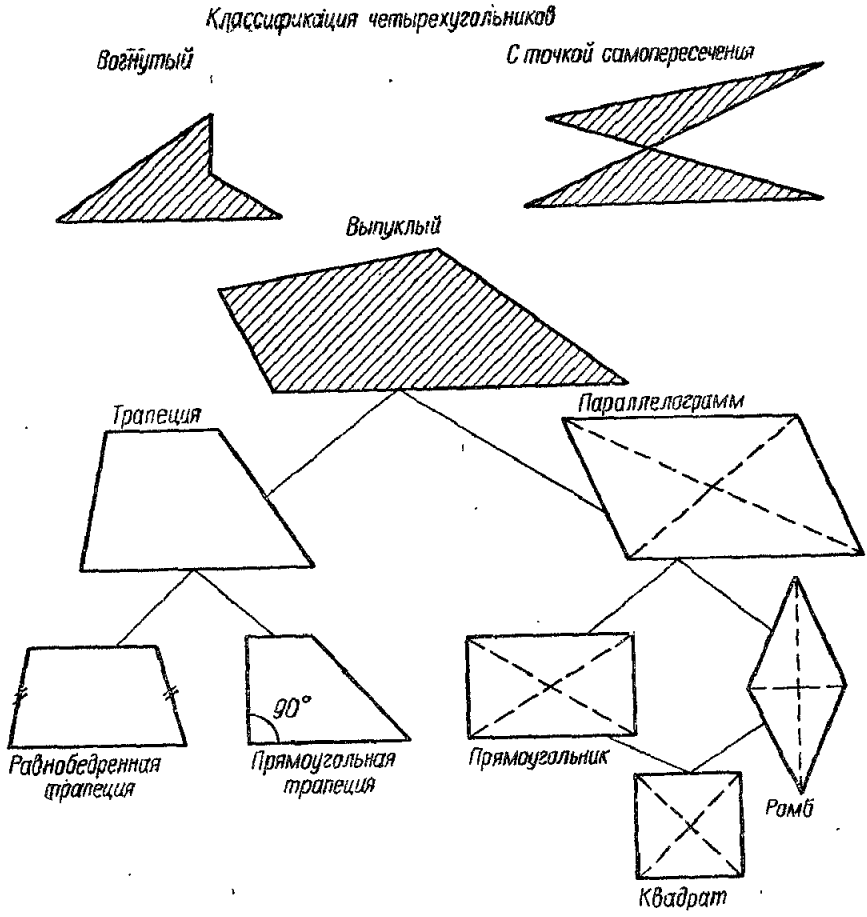


Рис. 69.

Доказательство. По условию задачи прямые AK и BE есть биссектрисы углов A и B, так что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Но $\angle 1 = \angle 5$, как внутренние накрестлежащие при пересечении $BC \parallel AD$ и секущей BE. Значит, $\triangle ABE$ — равнобедренный, а в таком случае его биссектриса AK будет одновременно и медианой и высотой. Следовательно, $AK \perp BE$ и $BK = BE$. Остается доказать, что точка K лежит на средней линии трапеции. Но средняя линия MN

трапеции будет и средней линией $\triangle ABE$; значит, она должна делить BE пополам именно в точке K.

Таким образом, мы полностью доказали, что точка K есть точка пересечения биссектрис $\angle A$ и $\angle B$ и что эти биссектрисы пересекаются под прямым углом.

В заключение § 19 и 20 на рис. 69 приведена классификация четырехугольников.

§ 21. Окружность и круг

Определение окружности удобно дать с помощью понятия о геометрическом месте точек (см. § 29).

Окружность есть геометрическое место точек равноудаленных от одной заданной точки, называемой центром окружности. Окружность часто обозначают одной буквой, показывающей ее центр, например окружность O.

Радиусом окружности называется отрезок, соединяющий центр окружности с любой ее точкой. Каждая окружность имеет бесконечное число радиусов. Радиус обычно обозначают буквами r или R.

Все радиусы одной окружности равны между собой, что непосредственно вытекает из определения окружности. Поэтому обычно говорят: «окружность данного радиуса», хотя это не означает, что окружность имеет только один радиус, а значит, что все радиусы данной окружности имеют одинаковую длину.

Секущей называется прямая, проходящая через две произвольные точки окружности.

Хордой называется часть секущей, лежащая внутри окружности.

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через ее центр, т. е. диаметр является наибольшей из хорд. Обычно диаметр обозначается буквами d или D.

Длина диаметра равна удвоенной длине радиуса той же окружности, т. е.

$$d = 2r.$$

Часть окружности называется *дугой*.

Дуги одной и той же окружности равны между собой, если при совмещении этих дуг их концы совпадут. Если при совмещении двух дуг одной окружности два конца их совпадают, а два других не совпадают, то дуги не равны, причем та дуга считается меньшей, которая составит часть другой.

Суммой нескольких данных дуг одинакового радиуса называется такая дуга того же радиуса, которая составлена из частей, соответственно равных данным дугам.

Сумма дуг обладает п е р е м е с т и т е л ь н ы м и с о ч е т а т е л ь н ы м свойствами.

Из понятия о сумме дуг выводятся понятия о разности дуг, об умножении и делении дуги на число аналогично тому, как и для отрезков прямой.

Через одну и ту же точку можно провести бесконечно много окружностей с произвольно выбранными центрами и радиусами.

Через две заданные точки A и B можно провести бесконечно много окружностей с произвольно выбранными радиусами r, r_1, r_2, r_3, r_4 ..., но не меньшими половины расстояния между точками A и B. Центры таких окружностей O, O_1, O_2, ... будут лежать на одной прямой, перпендикулярной отрезку, концами которого являются данные точки, и проходящей через середину этого отрезка (рис. 70).

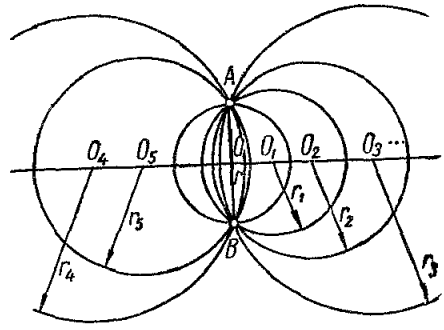


Рис. 70.

Через три заданные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.

Через три точки, лежащие на одной прямой, окружности провести нельзя. Другими словами, три точки, не лежащие на одной прямой, полностью определяют собою окружность.

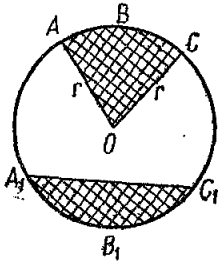


Рис. 71.

Диаметр окружности, перпендикулярный к ее хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.

Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

Кругом называется часть плоскости, заключенная внутри окружности.

Сектором называется часть круга, ограниченная некоторой дугой ABC и двумя радиусами, проведенными к концам этой дуги, например сектор $OABC$ на рис. 71.

Сегментом называется часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой, например сегмент $A_1B_1C_1$ на рис. 71.

Касательной называется прямая, имеющая одну общую точку с окружностью и лежащая в ее плоскости. Общая точка прямой с окружностью называется *точкой касания*.

Длиной касательной, проведенной из точки A к заданной окружности с точкой касания M, называется отрезок AM (рис. 72). Обычно под термином *касательная* и понимают лишь этот отрезок. Каса-

тельная к окружности перпендикулярна к радиусу (диаметру), проведенному в точку касания.

Из точки вне круга можно провести к окружности две касательные. Длины этих касательных равны между собой, так как два прямоугольных треугольника AOM и AOM_1 равны, поскольку имеют общую гипотенузу и по одному равному катету $OM = OM_1 = r$ (рис. 72).

Через точку, лежащую на окружности, можно провести лишь одну касательную к этой окружности. Через точку, лежащую внутри окружности, провести касательную к данной окружности нельзя. Однако через любую точку, лежащую вне, на или внутри окружности, можно провести бесконечное множество секущих.

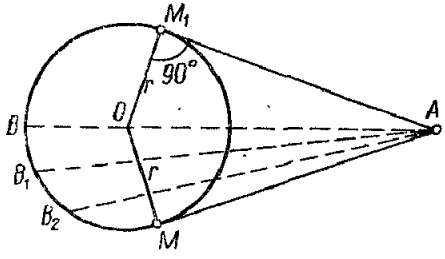


Рис. 72.

Касательную к окружности можно рассматривать как предельное положение секущих AB, AB_1, AB_2, ..., проведенных из заданной точки A, расположенной вне или на самой окружности (рис. 72). В последнем случае точка A совпадает с точкой M (или M_1).

Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам.

Для обозначения дуги часто пользуются специальным знаком $\smile$, и, например, вместо «дуга AB» можно писать $\smile AB$.

Принято говорить, что прямая MN и дуга AB некоторой окружности O сопряжены, если они имеют общую точку (например точку B) и в этой точке прямая MN является касательной к данной дуге AB.

Задача 1. Построить сопряжение данной дуги AB радиуса R с отрезком прямой MN. Выполнить чертеж.

Решение. Из точки N (или M) восстанавливаем перпендикуляр $ON = R$. Из точки O как из центра радиусом R проводим дугу AB, так чтобы точки A и N совпали и чтобы дуга AB шла в направлении продолжения отрезка MN.

Две дуги, сходящиеся в некоторой точке B, называются *сопряженными*, если в этой точке они имеют общую касательную.

Задача 2. Построить сопряжение дуги AB радиуса R с другой дугой CD радиуса r. Выполнить чертеж.

Решение. Из произвольной точки O проведем раднусом R дугу AB. Соединим точку O с точкой B. На радиусе OB (или на его продолжении, если $r > R$) от точки B отложим отрезок $BO_1 = r$. Из точки O_1, как из центра, радиусом r проведем дугу CD так, чтобы точки C и B совпали и $\smile CD$ являлась бы продолжением

дуги AB. Сопряжение выполнено, поскольку любая прямая l, проходящая через точку B перпендикулярно к OB, является касательной и к дуге CD, так как $l \perp O_1M$.

Задача 3. Равные отрезки $AB = CD$ пересекаются в точке M так, что $AM = MC$. Доказать, что точки A, B; C и D лежат на одной окружности.

Доказательство. Возьмем точку K — середину отрезка AB и точку L — середину отрезка CD (рис. 73). Проведем через точки K и L перпендикуляры соответственно к AB и CD до их пересечения в точке O. Перпендикуляр KO есть геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка AB, а перпендикуляр LO — от концов CD; следовательно,

$$OA = OB \text{ и } OC = OD.$$

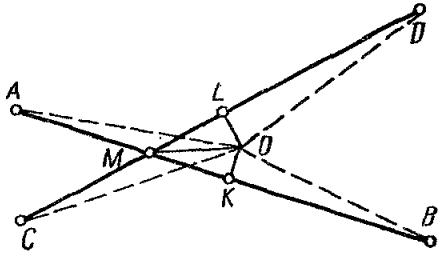


Рис. 73.

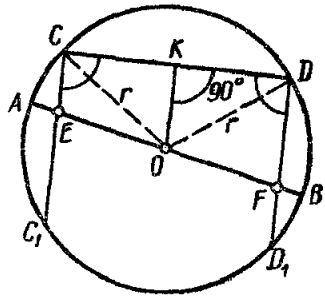


Рис. 74.

Далее $\triangle AMO = \triangle CMO$ по двум равным сторонам и углу между ними ($AM = CM$ по условию; сторона OM общая и $\angle AMO = \angle CMO$, поскольку $\triangle OML = \triangle OMK$, как прямоугольные треугольники с общей гипотенузой и равными катетами $ML = CL - CM = AK - AM = MK$; $CL = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB = AK$ по условию, так что $\angle OML = \angle OMK$, а углы $\angle LMA = \angle CMK$ как вертикальные).

Поэтому $AO = OC$, а в таком случае

$$OA = OB = OC = OD,$$

т. е. точки A, B, C, D одинаково удалены от одной точки O и, значит, лежат на одной окружности.

Задача 4. Доказать, что перпендикуляры к хорде, восстановленные в ее концах, пересекают произвольный диаметр в точках, которые равноудалены от центра (рис. 74).

Доказательство. Пусть CC_1 и DD_1 — перпендикуляры к хорде CD, которые пересекают диаметр AB и в точках E и F.

Для доказательства проведем из центра O отрезок $OK \perp CD$, тогда $CK = KD$ (поскольку, $\triangle CKO = \triangle DKO$, как прямоугольные треугольники с общим катетом OK и равными гипотенузами $OC = OD = r$; или же непосредственно на основании того, что диаметр, в данном случае его часть OK, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам). Отсюда вытекает, что прямая KO проходит через середину K стороны CD прямоугольной трапеции $CEFD$ и параллельна ее сторонам CE и DF, а потому OK есть ее средняя линия; следовательно, точка O — середина стороны EF и $OE = OF$.

Задача 5. Доказать, что если опустить перпендикуляры из концов диаметра на хорду или ее продолжение, то основания этих перпендикуляров равно отстоят от соответствующих концов хорды.

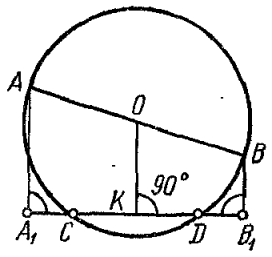


Рис. 75.

Доказательство. Пусть O — центр круга, AB — диаметр, CD — хорда. Проведем $AA_1 \perp CD$, $BB_1 \perp CD$. Для доказательства проведем $OK \perp CD$, тогда K — середина хорды CD (рис. 75). Четырехугольник ABB_1A_1 — прямоугольная трапеция, прямая OK проходит через середину O стороны AB и параллельна основаниям трапеции AA_1 и BB_1, а поэтому будет ее средней линией, откуда следует, что точка K середина стороны A_1B_1. Вычитая от равных отрезков A_1K и KB_1 равные отрезки CK и KD, получим, что $A_1C = DB_1$.

В одном круге или в равных кругах:

1) если дуги равны, то и стягивающие их хорды равны и одинаково удалены от центра;

2) если две дуги, меньшие полуокружности, не равны, то большая из них стягивается большей хордой и из обеих хорд большая расположена ближе к центру.

Касающимися окружностями называются такие две окружности, которые имеют лишь одну общую точку.

Две окружности, имеющие две общие точки, называются *пересекающимися*.

Трех общих точек две неравные окружности иметь не могут, так как, в противном случае, через три точки оказались бы проведенными две разные окружности, что невозможно.

Две или несколько окружностей называются *концентрическими*, если их центры совпадают (находятся в одной точке). Две равные окружности имеют бесконечно много общих точек, если они концентрические.

Линией центров называется прямая, проходящая через центры двух окружностей. Если две окружности имеют общую точку, расположенную вне линии центров, то они имеют еще и другую общую

точку, симметричную с первой относительно линии центров. Такие окружности пересекаются.

Если две окружности имеют общую точку, лежащую на линии центров, то они в этой точке касаются.

Две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 могут иметь следующие случаи взаимного расположения:

1. Одна окружность лежит вне другой. Общих точек нет. В этом случае

$$O_1O_2 > R_1 + R_2.$$

2. Одна окружность лежит вне другой. Имеется лишь одна общая точка (внешнее касание). Тогда

$$O_1O_2 = R_1 + R_2.$$

3. Окружности пересекаются. Следовательно,

$$|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2.$$

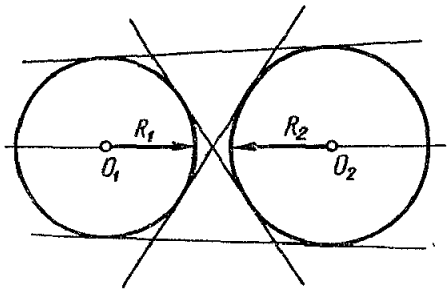


Рис. 76.

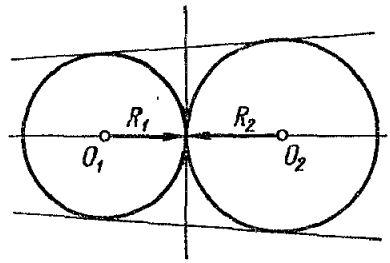


Рис. 77.

4. Окружности имеют внутреннее касание. В этом случае

$$O_1O_2 = |R_1 - R_2|.$$

5. Одна окружность лежит внутри другой. Общих точек нет. Тогда

$$O_1O_2 < |R_1 - R_2|.$$

В частности, для концентрических окружностей расстояние между центрами равно нулю:

$$O_1O_2 = 0.$$

К двум окружностям (случай 1) можно провести четыре общих касательных (две внутренние и две внешние) (рис. 76).

К двум внешне касающимся окружностям (случай 2) можно провести три общих касательных (рис. 77). Одна из них будет проходить через точку касания перпендикулярно линии центров O_1O_2.

В частности, при $R_1 = R_2$ две других касательных параллельны линии центров.

К двум пересекающимся окружностям (случай 3) можно провести лишь две общие касательные (рис. 78).

Две внутренне касающиеся окружности (случай 4) имеют одну общую касательную, она перпендикулярна линии их центров (рис. 79).

В пятом из перечисленных случаев расположения двух окружностей общих касательных у них нет.

Задача 6. Доказать, что если две касательные к окружности пересекаются под углом в 60°, то расстояние от точки их пересечения до центра круга равно диаметру круга.

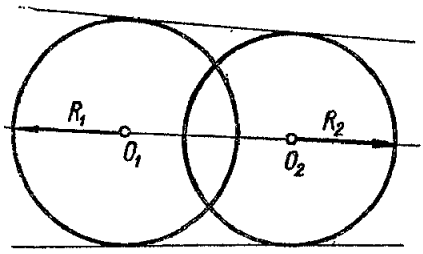


Рис. 78.

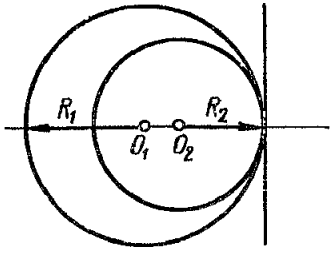


Рис. 79.

Доказательство. Пусть MA и MB — касательные, проведенные из внешней точки M к окружности O (рис. 80). Треугольники OAM и OBM — прямоугольные, так как OA и OB — радиусы, проведенные в точки касания A и B; кроме того, OA и OB равны, как радиусы, а MA и MB — как касательные, проведенные из одной внешней точки; следовательно, прямоугольные треугольники OAM и OBM равны по двум катетам, значит,

$$\angle AMO = \angle BMO = 30°,$$

а в таком случае

$$OM = 2AO = 2r.$$

Задача 7. Доказать, что если через точки пересечения двух окружностей провести две параллельные прямые, то наибольшие отрезки этих прямых, ограниченные окружностями, равны.

Доказательство. Пусть CAD и EBF — параллельные секущие, проходящие через общие точки A и B окружностей O и O_1; CD и EF — отрезки, ограниченные окружностями (рис. 81). Через O и O_1 проведем две прямые KL и MN перпендикулярно CD и EF. Тогда

$$CK = KA, \quad AM = MD \quad \text{и} \quad EL = LB, \quad BN = NF,$$

так как диаметр (или его часть), проведенный перпендикулярно к хорде, делит ее пополам. Но $KMNL$ — прямоугольник, а потому $KM = LN$. С другой стороны, KM и LN есть суммы половин хорд; следовательно,

$$CD = EF.$$

Задача 8. Две окружности внешне касаются и к ним проведена общая внешняя касательная. На отрезке касательной, заключенном между точками касания, как на диаметре, построена третья окружность. Доказать, что она касается линии центров.

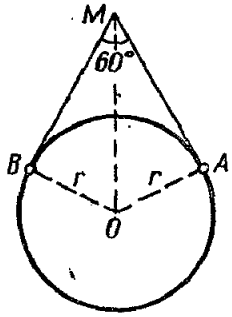


Рис. 80.

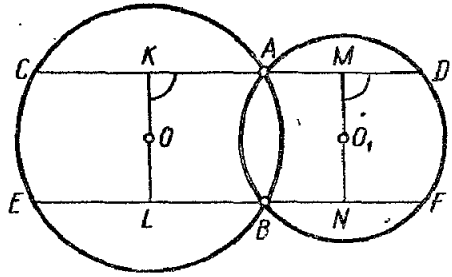


Рис. 81.

Доказательство. Пусть на отрезке касательной AB, ограниченной точками касания A и B, как на диаметре, построена окружность (рис. 82). Через точку касания K окружностей O_1 и O_2 проводим касательную до пересечения с касательной AB в точке O; тогда $AO = OK = OB$, как касательные, проведенные из одной точки; значит, окружность O пройдет через точку K и будет касательной к линии центров O_1O_2, так как прямая O_1O_2 перпендикулярна к радиусу OK в его конце.

Задача 9. К окружности проведены две параллельные касательные. Доказать, что точки касания их и центр лежат на одной прямой (рис. 83).

Доказательство. Проведем через центр O прямую KL, параллельную касательной AB, тогда KL параллельна и касательной CD. Прямая $KL \parallel AB$, а потому сумма внутренних односторонних углов AEO и EOK равна 180°; но OE — радиус, проведенный в точку касания, а потому $\angle AEO = 90°$, и, следовательно, $\angle EOK = 90°$.

Аналогично $\angle KOF = 90°$, а потому угол EOF — развернутый, точки касания E, F и центр O лежат на одной прямой EOF.

Задача 10. Две окружности концентричны. Доказать, что хорда большей окружности, касающейся меньшей, в точке касания делится пополам. Построить рисунок.

Доказательство. Пусть хорда большей окружности AB касается меньшей окружности в точке C. Проведем в точку касания

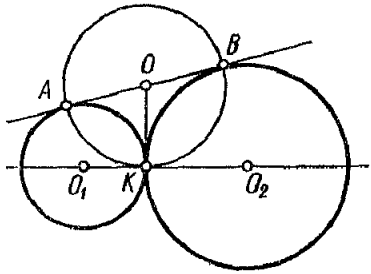


Рис. 82.

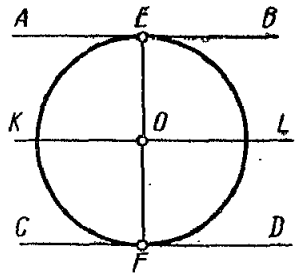


Рис. 83.

радиус OC; тогда OC перпендикулярен касательной AB, но AB — хорда большей окружности, и, следовательно, перпендикуляр из центра делит ее пополам, т. е. точка C — середина AB.

Задача 11. Внешняя касательная AB двух окружностей радиусов R и r в m раз больше их внутренней касательной CD. Определить расстояние между центрами этих окружностей O_1 и O_2 (рис. 84).

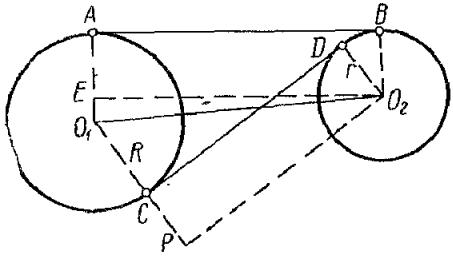


Рис. 84.

Решение. Проведем прямые $EO_2 \parallel AB$ и $PO_2 \parallel CD$. Тогда прямоугольные треугольники O_1O_2E и O_1O_2P будут иметь общую гипотенузу O_1O_2. Следовательно, поскольку $CD = PO_2$, получим

$$CD^2 + O_1P^2 = O_1E^2 + O_2E^2.$$

Но $O_1P = R + r$, $O_1E = R - r$, а по условию задачи

$$EO_2 = AB = mCD.$$

Таким образом,

$$CD^2 + (R + r)^2 = (R - r)^2 + (mCD)^2,$$

откуда

$$CD = 2\sqrt{\frac{rR}{m^2 - 1}}.$$

Окончательно получаем:

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1E^2 + O_2E^2} = \sqrt{\frac{4rR}{m^2 - 1} + (R - r)^2}.$$

Задача 12. Окружность O_1 пересекает две концентрические окружности, одну — в точках A и B, другую — в точках C и D (рис. 85). Доказать, что хорда AB параллельна хорде CD.

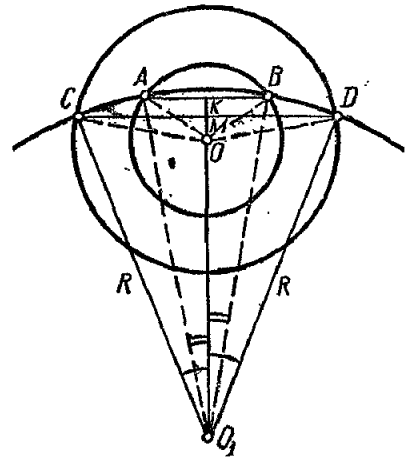


Рис. 85.

Доказательство. Пусть O — центр концентрических окружностей, O_1 — центр секущей окружности, и линия центров OO_1 пересекает хорду CD в точке M, AB — в точке K. Из равенства треугольников COO_1 и DOO_1 (у которых $O_1C = O_1D = R$, $OC = OD = r$ и OO_1 общая сторона) следует, что OO_1 — биссектриса угла CO_1D, а так как треугольник CO_1D равнобедренный, то хорда CD перпендикулярна прямой OO_1. Аналогично доказываем, исходя из равенства треугольников AOO_1 и BOO_1, что прямая AB перпендикулярна OO_1. Следовательно, прямые AB и CD параллельны.

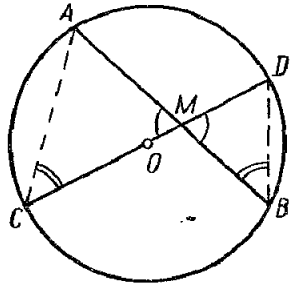


Рис. 86.

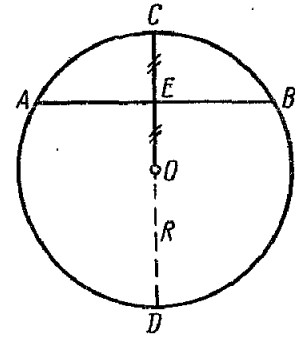


Рис. 87.

Если через точку M, взятую внутри круга, проведены какая-нибудь хорда AB и диаметр CD, то произведение отрезков хорды равно произведению отрезков диаметра (рис. 86):

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Действительно, $\triangle AMC \sim \triangle DMB$, поскольку $\angle C = \angle B$, как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности AD (см. § 22), а углы при вершине M равны как вертикальные. Тогда

$$\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB} \text{ или } AM \cdot MB = CM \cdot MD,$$

что и требовалось доказать.

Задача 13. В окружности радиуса R хорда AB перпендикулярна к одному из радиусов OC и в точке пересечения E делит его пополам (рис. 87). Определить длину хорды.

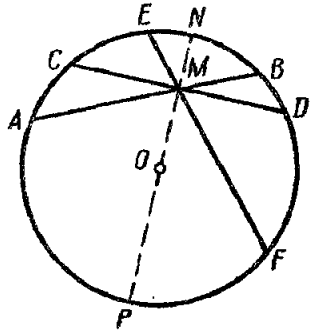


Рис. 88.

Решение. Продолжим радиус OC до пересечения с окружностью в точке D. Тогда

$$CE \cdot ED = AE \cdot BE.$$

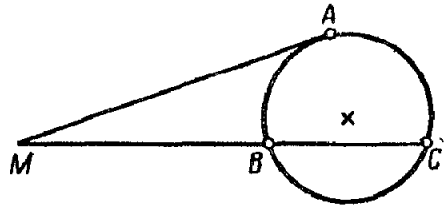


Рис. 89.

Поскольку по условию $CE = \frac{1}{2}R$, $ED = \frac{3}{2}R$, $AE = BE$, то $AE^2 = \frac{3}{4}R^2$; следовательно,

$$AB = 2AE = R\sqrt{3}.$$

Если через точку M, взятую внутри круга радиуса R, проведено несколько хорд, то произведение отрезков каждой хорды, на которые делит ее точка M, есть величина постоянная, равная $R^2 - OM^2$:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD = EM \cdot MF = \ldots = NM \cdot MP = R^2 - OM^2,$$

так как $MN = R - OM$, $MP = R + OM$ и, следовательно (рис. 88),

$$NM \cdot MP = (R - OM)(R + OM) = R^2 - OM^2.$$

Задача 14. Через точку M внутри окружности проведены две хорды. Одна из них разделена точкой M на части 6 и 25 *см*, а другая — в отношении 2 : 3. Определить длину второй хорды. Построить рисунок.

Решение. Обозначим отрезки, на которые делит точка M вторую хорду, через $2x$ и $3x$. Тогда ее длина будет равна $5x$. Произ-

ведение отрезков, на которые точка M делит обе хорды, равны; следовательно,

$$2x \cdot 3x = 150 \text{ см}^2, \text{ откуда получаем } x = 5 \text{ см}.$$

Таким образом, длина второй хорды равна 25 *см*.

Если из точки M, взятой вне круга, проведены к окружности касательная MA (A — точка касания) и секущая MBC (MB — внешняя часть секущей, BC — внутренняя ее часть), то квадрат касательной равен произведению всей секущей на ее внешнюю часть (рис. 89):

$$MA^2 = MC \cdot MB.$$

Справедливо и обратное утверждение. Если из точки M проведены к окружности секущая MKL и отрезок MN, где N — точка, лежащая на окружности, и если имеет место соотношение

$$MN^2 = ML \cdot MK,$$

где ML — вся секущая, MK — внешняя часть секущей, то прямая MN является касательной к данной окружности.

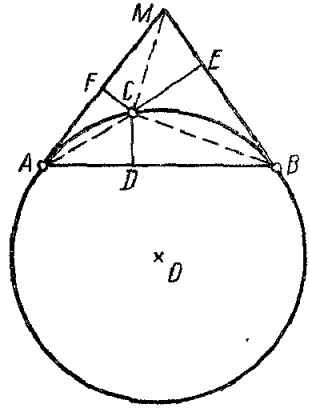


Рис. 90.

Задача 15. Из точки M, взятой вне круга, проведены касательная a и секущая. Отношение внешней части секущей к внутренней ее части равно $m : n$. Определить длину секущей.

Решение. Обозначим внешнюю и внутреннюю части секущей соответственно через $BM = mx$, $BC = nx$ (рис. 89), тогда $MC = (m + n)\,x$. Следовательно,

$$a^2 = (m + n)\,x \cdot mx,$$

откуда

$$x = \frac{a\sqrt{m(m+n)}}{m(m+n)}.$$

Таким образом, длина секущей равна

$$MC = x(m + n) = \frac{a\sqrt{m(m+n)}}{m}.$$

Задача 16. Доказать, что расстояние произвольной точки окружности от хорды есть средняя пропорциональная между расстояниями от той же точки до касательных, проведенных к окружности в концах этой хорды.

Доказательство. На рис. 90 из концов хорды AB проведены к окружности O касательные AM и BM. Из точки окружности C

опущены перпендикуляры $CD \perp AB$, $CF \perp AM$ и $CE \perp BM$. Требуется доказать, что

$$CD^2 = CF \cdot CE.$$

Из подобия прямоугольных треугольников $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ ($\angle CAD = \angle CBE$, как измеряющиеся одной и той же дугой CB, см. § 22), $\triangle BCD \sim \triangle ACF$ ($\angle FAC = \angle CBD$ — измеряются дугой AC), находим:

$$\frac{CD}{FC} = \frac{AC}{CB} \text{ и } \frac{CE}{CD} = \frac{AC}{CB}, \text{ откуда } \frac{CD}{FC} = \frac{CE}{CD} \text{ или } CD^2 = CF \cdot CE,$$

что и требовалось доказать.

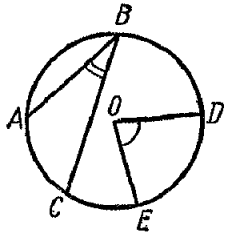


Рис. 91.

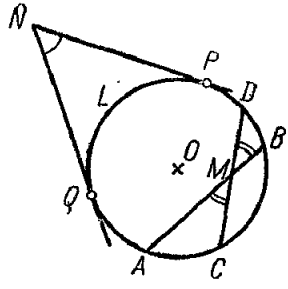


Рис. 92.

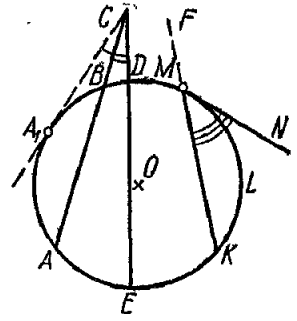


Рис. 93.

Примечание. Если хорда AB будет диаметром, то из этой задачи получаем, как частный случай, что перпендикуляр, опущенный из любой точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

§ 22. Углы в круге

Центральным углом называется угол, образованный двумя радиусами, например $\angle EOD$ (рис. 91).

Вписанным углом называется угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, например, $\angle ABC$ (рис. 91). О вписанном угле, как и о центральном, принято говорить, что он опирается на дугу, заключенную между его сторонами.

Описанным углом называется угол, образованный двумя касательными, исходящими из одной точки, например, $\angle QNP$ (рис. 92).

Длина дуги, описываемой концом радиуса, прямо пропорциональна величине соответствующего центрального угла; поэтому дуги и углы измеряются одними и теми же единицами измерения (градусами, радианами).

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 91):

$$\angle EOD = \cup ED.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

$$\angle ABC = \frac{\cup AC}{2}.$$

Все вписанные в данную окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой (так как они измеряются половиной одной и той же дуги).

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — *прямой*.

Описанный угол измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключенных между точками касания (рис. 92):

$$\angle QNP = \frac{\cup QCP - \cup QLP}{2}.$$

Угол между двумя хордами, т. е. угол, вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями этих сторон (рис. 92):

$$\angle AMC = \angle DMB = \frac{\cup AC + \cup DB}{2}.$$

Если точка B будет стремиться к точке D и совпадет с нею (при этом одновременно и точка M совпадет с точкой B), то $\cup DB = 0$, и мы снова получим формулу для вписанного угла.

Угол между двумя секущими, т. е. угол, вершина которого лежит вне круга и стороны пересекаются с окружностью, измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами (рис. 93):

$$\angle ACE = \frac{\cup AE - \cup BD}{2}.$$

Эта формула остается справедливой, если секущая ABC перейдет в касательную A_1C; тогда

$$\angle A_1CE = \frac{\cup A_1E - \cup A_1D}{2},$$

и если обе секущие перейдут в касательные, тогда мы снова получим формулу для описанного угла.

Угол между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключенной внутри его (рис. 93):

$$\angle KMN = \frac{\cup KLM}{2}.$$

Эту формулу можно рассматривать как частный случай формулы для вписанного угла, когда одна из хорд, образующих вписанный угол, переходит в касательную.

Задача 1. AB — диаметр окружности O, радиус $OC \perp AB$. Через середину D радиуса OC проведена хорда $EF \parallel AB$ (рис. 94). Доказать, что угол ABE в два раза меньше угла CBE (или, что является эквивалентным, в три раза меньше угла ABC).

Доказательство. Соединим прямыми точки E и O, C и F. Прямоугольные треугольники EOD и CDF равны по двум равным катетам, откуда $\angle CFD = \angle DEO$, при этом $\angle DEO = \angle EOA$,

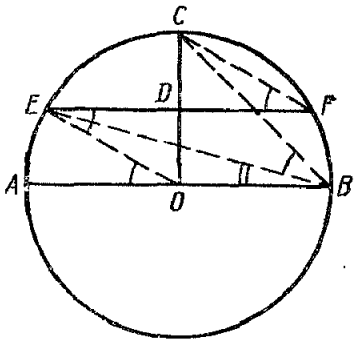


Рис. 94.

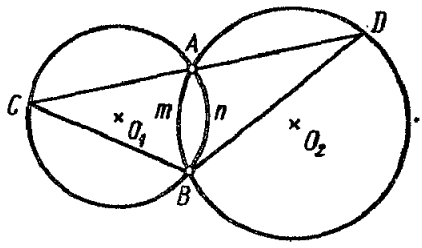


Рис. 95.

а потому $\angle CFD = \angle EOA$. Но угол EOA — центральный, измеряемый дугой AE, а угол CFE — вписанный, измеряемый половиной дуги EC, а потому из равенства углов EOA и CFE следует, что дуга AE в два раза меньше дуги EC, и, значит, $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle CBE$ или $\angle ABE = \frac{1}{3}\angle ABC$.

Задача 2. Вычислить вписанный угол, опирающийся на дугу, равную $\frac{1}{18}$ части окружности.

Решение. $\frac{1}{18}$ часть окружности составляет дугу в 20°. Следовательно, вписанный угол, опирающийся на эту дугу, равен 10°.

Задача 3. Две окружности пересекаются в точках A и B; CAD — их общая секущая. Доказать, что величина угла CBD не зависит от положения секущей (рис. 95).

Доказательство. Обозначим внутренние дуги, проходящие через точки A и B, как дуги AnB и AmB. Соединим прямыми

точку B с точками C и D, тогда в треугольнике BCD два угла C и D соответственно измеряются половинами дуг AnB и AmB, а потому величина их не будет изменяться, и, следовательно, в треугольнике BCD не изменится и величина третьего угла CBD, при любом положении прямой CAD.

Задача 4. Хорда делит окружность в отношении 5 : 11. Определить величину вписанных углов, опирающихся на эту хорду.

Решение. Вся окружность, составляющая по условию задачи $5+11=16$ частей, содержит 360°. Следовательно, хорда делит окружность на две части, равные соответственно

$$\frac{360^\circ}{16}\cdot 5 = 112^\circ 30', \quad \frac{360^\circ}{16}\cdot 11 = 247^\circ 30'.$$

Вписанный угол, опирающийся на первую дугу, равен

$$\frac{112^\circ 30'}{2} = 56^\circ 15',$$

а опирающийся на вторую дугу —

$$\frac{247^\circ 30'}{2} = 123^\circ 45'.$$

Задача 5. Через конец хорды, делящей окружность в отношении 3 : 5 проведена касательная. Определить острый угол между хордой и касательной.

Решение. Дуга, заключенная между хордой и касательной, составляет $\frac{3}{8}$ всей окружности, т. е. $360^\circ \cdot \frac{3}{8} = 135^\circ$. Следовательно, острый угол между хордой и касательной, равен

$$\frac{135^\circ}{2} = 67^\circ 30'.$$

Задача 6. Внутри данной окружности помещается другая окружность. ABC и ADE — хорды бо́льшей окружности, касающиеся в точках B и D меньшей окружности (рис. 96). BmD — меньшая из дуг между точками B и D, CnE — дуга между концами хорд AC и AE. Дуга BmD содержит 130°. Определить дугу CnE.

Решение. Пусть O_1 — центр меньшей окружности (рис. 96). Построим центральный угол BO_1D. Поскольку $\smile BmD = 130^\circ$, то $\angle BO_1D = 130^\circ$; следовательно, $\angle CAD = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$, так как $\angle O_1BA = \angle O_1DA = 90^\circ$.

Угол CAD является вписанным в окружность O, опирающимся на $\smile CnE$ и измеряется половиной этой дуги. Поскольку $\angle CAD = 50^\circ$, то $\smile CnE$ содержит 100°.

Задача 7. В окружности O проведена хорда AB (рис. 97). На меньшей из двух дуг, стягиваемых хордой, дана точка M и через эту точку к окружности проведена касательная PQ. Найти на касательной точку, из которой хорда AB видна под наибольшим углом.

Решение. Угол AMB является вписанным и, следовательно, измеряется половиной дуги AnB. Любой другой угол с вершиной на касательной измеряется полуразностью двух дуг, из которых большей является та же дуга AnB. Следовательно, хорда AB видна под наибольшим углом из самой точки M

Задача 8. Доказать, что отрезок произвольной касательной, заключенный между двумя параллельными касательными к той же окружности, виден из центра под прямым углом.

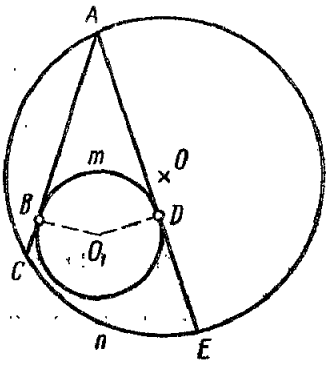


Рис. 96.

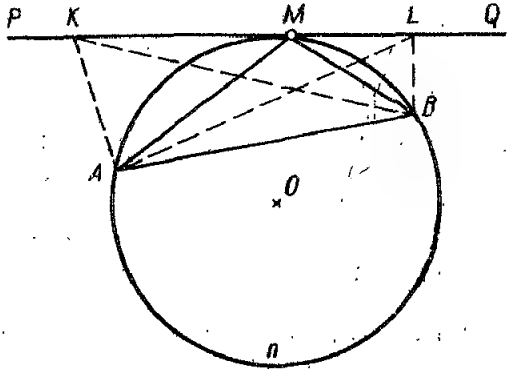


Рис. 97.

Доказательство. AM, AB, BN по условию — касательные к окружности с центром в точке O; $AM \parallel NB$ (рис. 98). Соединим точки A и B с центром O, тогда OA и OB будут биссектрисами углов MOK и KON, так как

$$\triangle OMA = \triangle OAK \text{ и } \triangle OKB = \triangle OBN.$$

Но угол MON равен 180°, следовательно,

$$2(\angle AOK + \angle KOB) = 2\angle AOB = 180°,$$

так что $\angle AOB = 90°$.

Задача 9. Если через точку касания двух окружностей провести общую секущую, то касательные в точках пересечения секущей с окружностями параллельны. Доказать.

Доказательство. Две окружности с центрами O и O_1 касаются внешне в точке A; MN — общая секущая, проходящая

через точку A; MK и NP — касательные к соответственным окружностям (рис. 99). Соединим точки M и A с центром O, а точки A и N — с центром O_1. Прямая OO_1 (линия центров) с прямой MN образует равные вертикальные углы: $\angle MAO = \angle NAO_1$ а тогда, в свою очередь, $\angle OMA = \angle ANO_1$, так как треугольники OMA и AO_1N равнобедренные. Далее, $\angle OMK = \angle O_1NP = 90°$, поскольку радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной; следовательно, и $\angle KMA = \angle ANP$. А так как они внутренние накрестлежащие при MK и PN и секущей MN, то

$$MK \parallel PN.$$

Задача 10. Если две окружности касаются, то любая общая секущая, проведенная через точку касания, отсекает от окружностей две равные противолежащие дуги. Доказать.

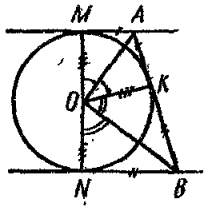


Рис. 98.

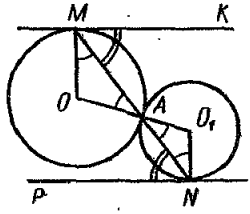


Рис. 99.

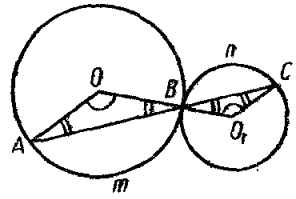


Рис. 100.

Доказательство. Две окружности касаются в точке B; AC — общая секущая, проходящая через эту точку (рис. 100). Соединив центры с концами хорд, получим два равнобедренных треугольника: $\triangle AOB$ и $\triangle BCO_1$, в которых $\angle OBA = \angle CBO_1$, как вертикальные, и $\angle OBA = \angle OAB = \angle BCO_1$, как углы при основании равнобедренных треугольников. Следовательно, центральные углы равны ($\angle AOB = \angle BO_1C$), а в таком случае равны и стягивающие их дуги

$$\smile AmB = \smile BnC.$$

§ 23. Длина окружности. Площадь круга и его частей

Длиной окружности называется предел последовательности периметров правильных вписанных в эту окружность многоугольников (или правильных многоугольников, описанных вокруг нее) при неограниченном увеличении числа их сторон.

Увеличение числа сторон правильного вписанного в окружность многоугольника удобно выполнять путем удвоения его сторон.

Отношение длины окружности C к ее диаметру D есть величина постоянная для всех окружностей. Для обозначения этой величины Леонард Эйлер в 1748 г. предложил применять малую греческую букву π (пи):

$$\frac{C}{D} = \pi.$$

Таким образом, задача вычисления длины окружности C сводится к вычислению числа π, так как

$$C = \pi D = 2\pi R.$$

Поскольку длина окружности и ее диаметра несоизмеримы, число π точно вычислено быть не может и представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь.

Это было строго доказано только в 1882 г. Ф. Линдеманом, который показал, что число π трансцендентно, т. е. оно не может быть корнем какого-либо алгебраического уравнения.

Таблица 2

Число сторон правильного вписанного многоугольника	Отношение периметра многоугольника к диаметру окружности
6	3,0000000
12	3,1058285
24	3,1326286
48	3,1393502
96	3,1410320
192	3,1414525
384	3,1415576
768	3,1415839

Для того чтобы получить приближенную величину числа π, следует вписать в окружность какой-либо правильный многоугольник, вычислить его периметр и разделить этот периметр на диаметр описанной окружности. Точность вычисления числа π возрастает при увеличении числа сторон такого многоугольника. Для наглядности приведем табл. 2.

Точное значение π (ограничиваясь сорок одним знаком) будет

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ \ldots$$

Задача определения длины окружности и площади круга (так называемая «квадратура круга»), т. е. задача вычисления π, привлекала к себе внимание с древних времен. Так, у египтян (2-ое тысячелетие до н. э.) $\pi = 3{,}1605$, у вавилонян и древних китайцев $\pi = 3$, во II в. н. э. Чжан-Хен брал $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162\ldots$

Идея вычисления π как общего предела вписанных и описанных правильных многоугольников принадлежит Архимеду ($\sim$ 287—212 до н. э.), который получил оценки

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Взяв из этих оценок их среднее арифметическое, найдем $\pi = 3{,}14185$, т. е. определим π с погрешностью, меньшей чем 0,0003.

Пользуясь методом Архимеда, французский математик Виет* вычислил 9 знаков π, Романус — 17, а Ван Цейлен — 32. Дальнейшие вычисления требовали огромного труда и поэтому результат Ван Цейлена оставался рекордным, пока для вычисления π не были применены методы дифференциального и интегрального исчисления. Воспользовавшись этими методами, Ньютон (1643—1727) сравнительно легко вычислил 14 знаков, а Эйлер (1707—1783) — 20, затем при помощи новых формул Мэшин (1706) получил 100 знаков, Рихтер (1855) — 500 и Шенкс (1874) — 707 знаков.

Новые возможности возникли после создания электронных цифровых вычислительных машин. В 1945 г. с помощью ЭЦВМ были проверены вычисления Шенкса и оказалось, что у него верны только первые 528 знаков, а все остальные ошибочны.

В 1949 г. число π было вычислено с 2000 знаков, а в 1957 г. с 10000 знаков. Интересно отметить, что все цифры в π (если рассматривать достаточно большое их число) встречаются одинаковое число раз, но никакой закономерности в чередовании цифр обнаружить не удалось; они следуют одна за другой совершенно беспорядочно.

Вычисление такого большого количества знаков у π велось главным образом из теоретических интересов; для самых сложных расчетов в настоящее время очень редко используют больше десяти—пятнадцати десятичных знаков.

Запомнить первые 12 знаков π легко при помощи двустишия:

«Это я знаю и помню прекрасно,
их многие знаки мне лишни, напрасно».

Записав каждое слово двустишия цифрой, равной числу букв в нем, мы и получим

$$\pi = 3{,}14159265358\ldots$$

Для многих технических расчетов часто бывает достаточно знать число π с четырьмя десятичными знаками, т. е.

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

Отношение длин двух окружностей равно отношению их радиусов или диаметров

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

---

* Франсуа Виет (1540—1603) также первым представил π в виде бесконечного произведения.

Длина дуги окружности радиуса R может быть вычислена по формулам

$$l = \frac{\pi n^\circ R}{180^\circ} \quad \text{или} \quad l = \varphi R,$$

где n° — градусное измерение дуги, φ — радианное измерение дуги.

Площадь круга определяется как предел последовательности площадей правильных вписанных (или описанных) в этот круг многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон.

Площадь *круга* вычисляется по формуле:

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Отношение площадей двух окружностей равно отношению квадратов их радиусов или квадратов их диаметров:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}.$$

Площадь *сектора* равна длине дуги сектора, умноженной на половину радиуса

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi n^\circ R}{180^\circ} \cdot \frac{R}{2} = \frac{\varphi R^2}{2},$$

где n° и φ соответственно градусное и радианное измерение дуги сектора.

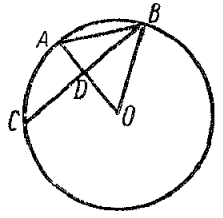


Рис. 101.

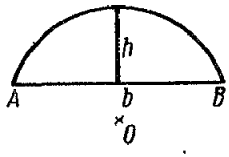


Рис. 102.

Площадь *сегмента* находится как разность между площадью соответствующего сектора и треугольника, образованного его радиусами и хордой.

Можно также сказать, что площадь сегмента равна половине раднуса, умноженной на разность между дугой сегмента и половиной хорды двойной его дуги. Это утверждение следует из рнс. 101, на котором $CD = DB$, $BC \perp AO$.

Если градусное измерение дуги сегмента невелико, то площадь сегмента можно вычислять по приближенной формуле, которая имеет вид

$$S_{\text{сегм}} \approx \frac{2}{3} bh,$$

где b — основание сегмента; h — высота сегмента, часто называемая «стрелкой» сегмента (рис. 102).

Более точная приближенная формула имеет вид

$$S_{\text{сегм}} \approx \frac{2}{3} bh + \frac{h^3}{2b}.$$

Площадь *кольца*, образованного двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2, вычисляется как разность площадей этих окружностей. Пусть $R_2 > R_1$, тогда

$$S_{\text{кольца}} = \pi (R_2^2 - R_1^2).$$

Задача 1. Радиус дуги равен 1200 *мм*, ее длина равна 450 *мм*. Сколько градусов содержит дуга?

Решение. Количество градусов, содержащихся в данной дуге, определим по формуле

$$n^\circ = \frac{180^\circ \cdot l}{\pi R},$$

где l — длина дуги; R — радиус дуги. Тогда (в данном случае), взяв $\pi = 3{,}14$, получаем:

$$n^\circ = \frac{180^\circ \cdot 450\ мм}{3{,}14 \cdot 1200\ мм} = 21^\circ{,}5 = 21^\circ 30';$$

если же взять $\pi = 3{,}1416$, то будем иметь:

$$n^\circ = 21^\circ,\ 4859 = 21^\circ 29',\quad 15 = 21^\circ 29' 9''.$$

Задача 2. Дуга радиуса 4 *см*, измеряющая центральный угол в 120°, равна длине некоторой окружности. Определить радиус этой окружности.

Решение. Длина данной дуги равна по условию длине некоторой окружности с радиусом R; следовательно,

$$\frac{4\pi \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 2\pi R,$$

откуда получаем:

$$R = 1\frac{1}{3}\ см.$$

Задача 3. Найти радиус такой окружности, для которой ее длина и площадь круга выражаются одним и тем же числом.

Решение. Обозначим радиус искомой окружности через R. Тогда по условию задачи должно иметь место равенство

$$2\pi R = \pi R^2,$$

откуда

$$R = 2.$$

Задача 4. Определить площадь круга, если площадь вписанного в него квадрата равна Q квадратным единицам.

Решение. Площадь квадрата через его диагональ выражается формулой

$$Q = \frac{1}{2} d^2,$$

откуда

$$d = \sqrt{2Q}.$$

Но диагональ квадрата равна диаметру описанной окружности, т. е.

$$2R = \sqrt{2Q},$$

следовательно, площадь круга равна

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi Q}{2}.$$

Задача 5. Радиус сектора равен r, а его площадь равна Q. Определить величину центрального угла.

Решение. Учитывая формулы для площади сектора и длины его дуги, получаем

$$Q = \frac{1}{2} r \cdot \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ},$$

откуда

$$n^\circ = \frac{2Q}{\pi r^2} 180^\circ.$$

Задача 6. Вокруг правильного треугольника с площадью Q описана окружность и в этот же треугольник вписана другая окружность. Определить площадь кольца между этими окружностями.

Решение. Площадь правильного треугольника через его высоту выражается по формуле

$$Q = \frac{h^2 \sqrt{3}}{3},$$

откуда

$$h = \sqrt{Q\sqrt{3}}.$$

Радиусы описанного и вписанного кругов соответственно будут равны

$$R = \frac{2}{3} h; \quad r = \frac{1}{3} h.$$

В таком случае площадь кольца будет равна

$$S = \pi (R^2 - r^2) = \pi \left(\frac{4}{9} h^2 - \frac{1}{9} h^2 \right) = \frac{\pi h^2}{3} = \frac{\pi Q \sqrt{3}}{3}.$$

Задача 7. Дан круг, которого касаются шесть равных ему кругов, касающихся также и между собой. Площадь всех семи кругов равновелика площади концентрического кольца, описанного около данной конфигурации кругов. Показать, что ширина кольца равна радиусу кругов.

Доказательство. Обозначим радиус данного круга O через R, ширину кольца BC через x (рис. 103).

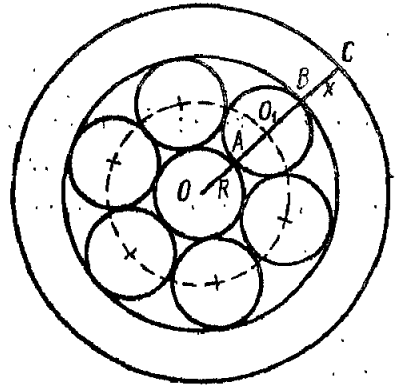


Рис. 103.

Площадь кольца по условию задачи равна площади семи равных кругов радиуса R; следовательно,

$$\pi(OC^2 - OB^2) = \pi[(3R + x)^2 - (3R)^2] = 7\pi R^2,$$

откуда

$$x^2 + 6Rx - 7R^2 = 0.$$

Поскольку $x > 0$, то из двух корней полученного квадратного уравнения следует выбрать только положительный корень

$$x = R,$$

который и является искомым ответом.

Задача 8. Построить окружность, касающуюся данной окружности O радиуса r и данной прямой l в данной на ней точке N.

Построение. Проведем через точку N прямую $m \perp l$ (рис. 104).

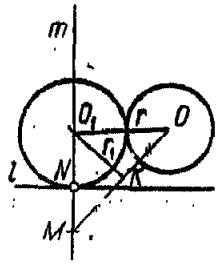


Рис. 104.

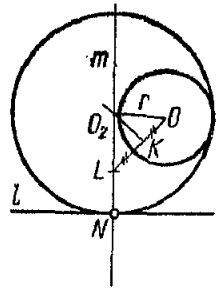


Рис. 105.

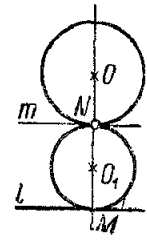


Рис. 106.

а) Отложив на прямой m от точки N по другую сторону от прямой l относительно данной окружности O отрезок $NM = r$, соединим точки O и M. Через середину отрезка OM проведем перпендикуляр до пересечения его в точке O_1 с прямой m. Точка O_1 и будет

центром искомой окружности, а $O_1N = r_1$ — ее радиусом ($\triangle O_1MO$ — равнобедренный).

б) Отложив от точки N вверх отрезок $NL = r$ (рис. 105) и выполнив построения, аналогичные изложенным в пункте a, получим окружность O_2, также удовлетворяющую условиям задачи. Таким образом, задача имеет два решения.

Ход построения не изменяется и в том случае, если прямая пересекает окружность O. В частности, если прямая l проходит через центр данной окружности, построение выполняется особенно просто. Рекомендуем выполнить его самостоятельно.

Если данная прямая касается данной окружности, построение также выполняется очень просто (выполнить самостоятельно).

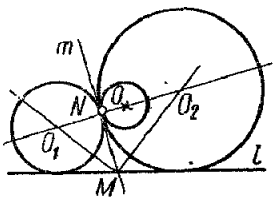


Рис. 107.

Задача 9. Построить окружность, касающуюся данной окружности O в данной точке N и данной прямой l.

Построение. Проведем прямую m, касающуюся окружности O в точке N. Для этого следует провести радиус ON и восстановить в точке N прямую $m \perp ON$.

а) Если $m \parallel l$, то опускаем из точки N перпендикуляр OM на прямую l. На отрезке NM, как на диаметре, строим окружность (рис. 106). В этом случае построение единственное.

б) Если прямая m не параллельна прямой l, то из точки M пересечения прямых m и l (рис. 107) проводим биссектрисы обоих смежных углов при прямой l до их пересечения с прямой ON в точках O_1 и O_2, которые и будут центрами искомых окружностей. Данная окружность O имеет с одной из искомых окружностей внутреннее касание.

В случае, когда прямая l пересекает данную окружность O, задача также имеет два решения, и снова одна из искомых окружностей с данной окружностью будет иметь внутреннее касание. Выполнить построение.

§ 24. Степень точки относительно данной окружности. Радикальная ось. Радикальный центр

Степенью точки A относительно данной окружности O радиуса R называется разность между квадратом расстояния точки A от центра O и квадратом радиуса, т. е., обозначив степень точки A через T, имеем

$$T = AO^2 - R^2.$$

Если точка A лежит вне окружности, то ее степень *положительна*, а если внутри окружности — *отрицательна*. Если точка A лежит на окружности ($AO = R$), то ее степень равна *нулю*.

Для внешней точки A величина ее степени равна квадрату касательной.

Для внутренней точки A абсолютная величина ее степени равна квадрату наименьшей полухорды, проходящей через эту точку.

Радикальной осью двух окружностей O_1 и O_2 называется прямая, точки которой имеют равные степени относительно данных окружностей. Эта прямая перпендикулярна к линии центров данных окружностей. Касательные, проведенные из любой точки радикальной оси к окружностям O_1 и O_2, равны между собой.

Расстояния m_1 и m_2 радикальной оси от центров O_1 и O_2 данных окружностей вычисляются по формулам:

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(O_1O_2 + \frac{R_1^2 - R_2^2}{O_1O_2}\right),$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left(O_1O_2 - \frac{R_1^2 - R_2^2}{O_1O_2}\right).$$

Построение радикальной оси двух окружностей. 1. В случае, когда окружности O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N, каждая из точек M и N принадлежит обеим окружностям и, следовательно, имеет относительно окружностей O_1 и O_2 нулевую степень. В этом случае радикальная ось проходит через точки M и N.

2. Аналогично для внутренне или внешне касающихся окружностей радикальная ось является их общей касательной, перпендикулярной линии центров.

3. Пусть даны две окружности O_1, O_2, одна из которых лежит внутри другой, но не касается ее (рис. 108). Проведем вспомогательную окружность O_3 так, чтобы она пересекла окружность O_1 в точках K и L, а окружность O_2 — в точках M и N. Прямые KL и MN продолжим до пересечения в точке P. Через точку P проведем $PQ \perp O_1O_2$. Прямая PQ и будет радикальной осью окружностей O_1 и O_2.

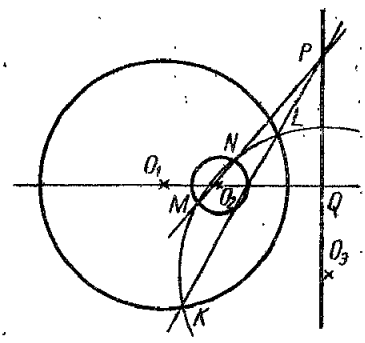


Рис. 108.

Проверить при помощи построений, что при различном выборе центра O_3 (соблюдая лишь условие пересечения окружностью O_3 двух заданных окружностей O_1 и O_2) результат будет один и тот же.

4. Для двух окружностей O_1 и O_2, расположенных одна другой и не имеющих общих точек, радикальная ось строится логично (рис. 109).

Радикальные оси любых трех попарно взятых окружностей O_1, O_2 и O_3 пересекаются в одной точке, которая называется радикальным центром трех окружностей (рис. 110). Другими словами, *радикальный центр* трех окружностей O_1, O_2 и O_3 можно определить как точку, степень которой относительно окружностей O_1, O_2 и O_3 равны.

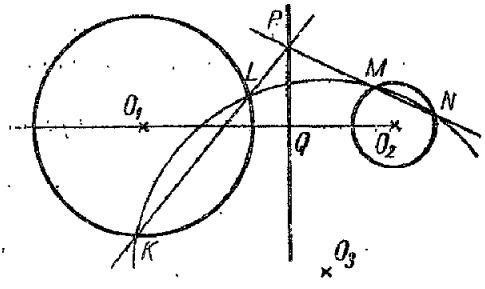


Рис. 109.

Если центры всех трех окружностей находятся на прямой, то все три радикальные оси между собой параллельны и, следовательно, радикального центра таких трех окружностей не существует.

Если центры трех данных окружностей не лежат на одной прямой, то радикальный центр находится как точка пересечения лю

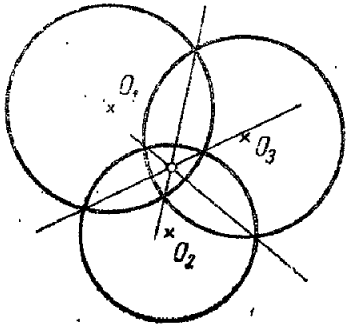


Рис. 110.

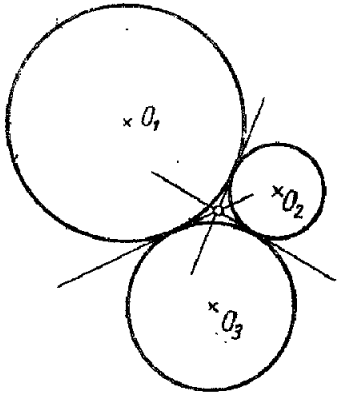


Рис. 111.

двух из трех радикальных осей, в частности, общих касательных, если хотя бы одна окружность касается двух других или если все три окружности касаются между собой (рис. 111).

§ 25. Вписанные и описанные многоугольники

Многоугольник называется *вписанным в окружность*, если все его вершины лежат на этой окружности. Такая окружность называется *описанной* около многоугольника.

Многоугольник называется *описанным около окружности*, если его стороны касаются этой окружности. Такая окружность называется *вписанной* в многоугольник.

В произвольный многоугольник нельзя вписать и около него нельзя описать окружность.

Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Центр описанной около треугольника окружности является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, восстановленных в их серединах.

Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника.

Радиус описанной около треугольника окружности по его сторонам и полупериметру вычисляется с помощью формулы

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}; \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Радиус вписанной в треугольник окружности вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Во всяком описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны между собой.

Во всяком вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Справедливы и обратные утверждения: четырехугольник можно вписать в окружность, если суммы его противоположных сторон равны между собой. В четырехугольник всегда можно вписать окружность, если сумма хотя бы одной пары противоположных углов его равна 180°. Очевидно, что сумма второй пары противоположных углов четырехугольника при этом также будет равна 180°.

Около параллелограмма в общем случае нельзя описать окружность. Около прямоугольника (в частности, квадрата) всегда можно описать окружность. Центр ее будет лежать в точке пересечения диагоналей. Около трапеции можно описать окружность лишь при условии, что она равнобочная.

Теорема Птолемея. *В выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*

Теорема Паскаля. *Если шестиугольник вписан в окружность и противоположные его стороны не параллельны, то точки пересечения продолжений этих сторон лежат на одной прямой.*

Теорема Брианшона. *Если шестиугольник описан около окружности, то прямые, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются в одной точке.*

Задача 1. Доказать, что произведение двух сторон треугольника равно произведению высоты, проведенной к третьей стороне, на диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

Доказательство. Пусть $\triangle ABC$ вписан в окружность O, $BD \perp AC$ (рис. 112). Проведем диаметр BM и хорду AM.

$\triangle BDC \sim \triangle BAM$, так как $\angle AMB = \angle BCD$, как углы, опирающиеся соответственно на одну и ту же дугу, $\angle MAB = \angle BDC = 90^\circ$ и, следовательно,

$$\frac{AB}{MB} = \frac{BD}{BC},$$

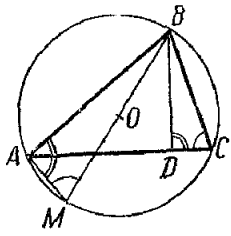


Рис. 112.

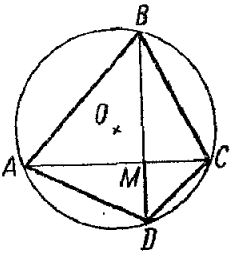


Рис. 113.

т. е.

$$AB \cdot BC = BD \cdot MB,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что если четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями вписан в окружность, то сумма квадратов противоположных сторон четырехугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

Доказательство. Применяя результат, полученный в предыдущей задаче, к треугольникам ABC и ADB, получаем (рис. 113):

$$AB \cdot BC = 2R \cdot BM,$$
$$AB \cdot AD = 2R \cdot AM.$$

Возводя оба равенства в квадрат и складывая, получили:

$$AB^2 (BC^2 + AD^2) = 4R^2 (BM^2 + AM^2).$$

Учитывая, что $AB^2 = BM^2 + AM^2$, и сокращая полученное равенство на эту величину, окончательно имеем:

$$BC^2 + AD^2 = 4R^2 = D^2.$$

Задача 3. В треугольник ABC, стороны которого $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$, вписана окружность. Найти длины отрезков, соединяющих точки касания.

Решение. По свойству касательных к окружности, выходящих из одной точки, находим, что $AE = AF$, $BF = BD$ и $CD = CE$ (рис. 114). Рассматривая четырехугольники $AEOF$, $BFOD$ и $CDOE$, легко показать, что $AO \perp EF$, $BO \perp FD$ и $CO \perp DE$.

Из $\triangle AEO$ ($\angle AEO = 90°$) находим его площадь

$$S = \frac{1}{2} AE \cdot OE = \frac{1}{2} AO \cdot \frac{1}{2} FE$$

или

$$FE = \frac{2AE \cdot OE}{AO}. \qquad (1)$$

Известно, что $OE = r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, где p — по-

лупериметр $\triangle ABC$. Учитывая, что $AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$, находим, что $AE + CD = b$, $CD + BF = a$, $BF + AE = c$ и $AE + CD + BF = p$. Отсюда

$$AE = p - a,\ BF = p - b,$$
$$CD = p - c,$$

тогда

$$OA = \sqrt{AE^2 + OE^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}.$$

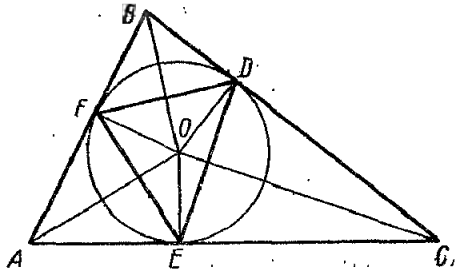


Рис. 114.

Подставив найденные значения OA, OE и AE в формулу (1), получим

$$EF = 2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Аналогично находим длину остальных двух искомых отрезков:

$$= 2(p-c)\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \text{ и } FD = 2(p-b)\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}.$$

Задача 4. В ромб вписана окружность. На какие четыре сти делится окружность точками касания сторон, если острый ол ромба равен 67°?

Решение. $ABCD$ — ромб, $\angle A = \angle C = 67°$ (рис. 115). Вписанная окружность касается сторон его в точках K, L, M, N. Соединим центр O с вершиной A. Тогда AO будет биссектрисой $\angle A$, а $\triangle AON$ — прямоугольный; значит, $\angle NOA = 90° - \angle NAO$, а $\angle NOM = 2\angle NOA = 180° - \angle A = 113°$. Но $\angle NOM = \angle KOL$ — центральные углы, а $\angle NOK = 180° - \angle MON = 67°$, как смежные;

следовательно, точки касания делят окружности на две пары вертикальных дуг по 113 и 67°.

Задача 5. Определить отношение радиуса вписанной в равносторонний треугольник окружности к радиусу описанной окружности.

Решение. В равностороннем $\triangle ABC$ его три медианы, биссектрисы и высоты совпадают и пересекаются в одной точке — центре треугольника. Радиусом описанной окружности будет отрезок, соединяющий центр O с одной из вершин треугольника, а вписанной — апофема * OD (рис. 116). Но так как AO еще и биссектриса, то $\angle OAD = 30°$, а $\triangle AOD$ — прямоугольный; следовательно, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$.

Задача 6. Сумма радиусов описанной и вписанной окружностей равностороннего треугольника равна его высоте. Выполнить рисунок и доказать.

Доказательство. В равностороннем $\triangle ABC$ центр описанной окружности будет в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к серединам сторон, а вписанной — в точке пересечения биссектрис треугольника. Так как биссектрисы, высоты и медианы равностороннего треугольника совпадают, то их центр будет общий. Опустим высоту $BD \perp AC$, она пройдет через центр окружности.

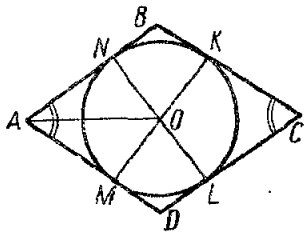


Рис. 115.

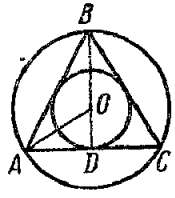


Рис. 116.

OB — радиус описанной окружности, OD — радиус вписанной окружности, следовательно,

$$OB + OD = BD,$$

что и требовалось доказать.

Задача 7. Доказать, что апофема правильного треугольника равна половине радиуса описанной окружности. Выполнить рисунок.

Доказательство. $\triangle ABC$ — правильный, OM — апофема ($OM \perp BC$; O — центр треугольника). Соединим вершины A, B, C с центром O, тогда $OA = OB = OC = R$, где R — радиус описанной окружности. Так как OB — биссектриса треугольника, то $\angle OBM = \angle ABO = 30°$, а $\triangle OBM$ — прямоугольный, OM — катет, лежащий против угла 30°; значит,

$$OM = \frac{OB}{2} = \frac{R}{2}.$$

* См. § 26.

Задача 8. Окружность вписана в трапецию, периметр которой равен P. Построить рисунок и определить среднюю линию трапеции.

Решение. Окружность вписана в трапецию $ABCD$, $P = AB + BC + CD + AD$. По свойству сторон описанного четырехугольника $AD + BC = AB + CD$. Следовательно, $P = 2(AD + BC)$, а средняя линия трапеции m равна

$$m = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{4}P.$$

Задача 9. В треугольник вписан круг так, что две из его сторон делятся точками касания в отношениях $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$. Построить рисунок и найти отношения сторон треугольника.

Решение. Обозначим: $AD = mx$, $DB = nx$, $CE = py$, $BE = qy$. Тогда: $AB : BC : CA = (mx + nx) : (py + qy) : (mx + py)$. По свойству отрезков касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки, $DB = BE$ или $nx = qy$. Отсюда

$$\frac{x}{y} = \frac{q}{n}$$

и, следовательно,

$$AB : BC : CA = (mq + nq) : (pn + qn) : (mq + np) = q(m + n) : n(p + q) : (mq + np).$$

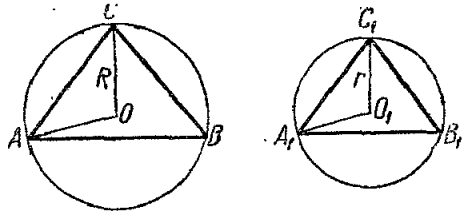


Рис. 117.

Задача 10. Доказать, что радиусы описанных около подобных треугольников окружностей пропорциональны сходственным сторонам.

Доказательство. Соединим центр окружности O с точками A и C (рис. 117). В треугольнике AOC $AO = OC = R$, а $\angle AOC = 2\angle ABC$, так как он, как центральный, измеряется всей дугой AC; $\angle ABC$ — вписанный и измеряется половиной дуги AC. Соединив центр окружности O_1 с точками A_1 и C_1, также получим равнобедренный $\triangle A_1O_1C_1$ с углом при вершине $A_1O_1C_1$, который равен удвоенному углу $A_1B_1C_1$. Но $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, как соответственные в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$. Значит, $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$. Следовательно,

$$\triangle AOC \sim \triangle A_1O_1C_1,$$

откуда

$$\frac{OC}{O_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \text{ т. е. } \frac{R}{r} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

§ 26. Правильные многоугольники

Многоугольник называется *правильным*, если он имеет равные стороны и равные углы.

Каждый угол правильного n-угольника равен $\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$.

Центром правильного многоугольника называется точка, равноотстоящая от всех его вершин. Центр находится также на одинаковых расстояниях от сторон многоугольника.

Радиусами правильного многоугольника называются отрезки, соединяющие его центр с вершинами.

Апофемами правильного многоугольника называются отрезки перпендикуляров, опущенных из его центра до пересечения со сторонами.

Вокруг правильного n-угольника можно описать и в него можно вписать окружность. Центры описанной и вписанной окружностей совпадают с центром многоугольника. Радиус описанной вокруг правильного многоугольника окружности равен его радиусу, а радиус вписанной окружности — апофеме многоугольника.

Правильные одноименные многоугольники подобны, их стороны относятся как апофемы или радиусы, а площади относятся как квадраты апофем или радиусов.

Сторона b_n правильного описанного многоугольника выражается через сторону a_n правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон и радиус R окружности по формуле:

$$b_n = \frac{2Ra_n}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

Сторона a_{2n} правильного вписанного в окружность радиуса R многоугольника с удвоенным числом сторон выражается через сторону a_n правильного вписанного n-угольника с помощью формулы:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Соотношения между сторонами некоторых правильных вписанных многоугольников и радиусом круга определяются следующим образом:

$$a_3 = R\sqrt{3} \approx 1{,}7321R,$$

$$a_4 = R\sqrt{2} \approx 1{,}4142R,$$

$$a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}1755R,$$

$$a_6 = R,$$

$$a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0{,}7654R,$$

$$a_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}6180R,$$

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0{,}5176R,$$

$$a_{15} = \frac{1}{4}R\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right] \approx 0{,}4158R.$$

Задача 1. В данную окружность вписать правильный шестиугольник и треугольник.

Раствором циркуля, равным радиусу окружности, делаем на ней засечки в точках A, B, C, D, E, F. Соединяя точки A, B, C, D, E, F подряд, получим правильный шестиугольник. Соединяя их через одну, получим правильный (равносторонний) треугольник (рис. 118).

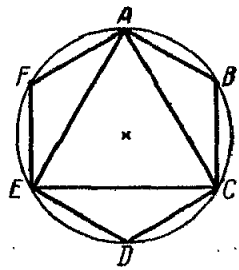


Рис. 118.

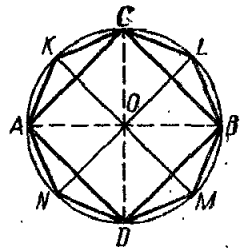


Рис. 119.

Задача 2. Вписать в данную окружность квадрат и правильный восьмиугольник.

Проведем в данной окружности O два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. Соединив точки A, D, B, C, получаем квадрат.

Опустив из центра O на стороны квадрата перпендикуляры и продолжив их до пересечения с окружностью, разделим ее на восемь равных частей. Точки деления окружности являются вершинами правильного восьмиугольника (рис. 119).

Задача 3. В данную окружность вписать правильный пятиугольник и правильный десятиугольник.

Проведем два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. Разделим пополам радиус AO в точке E. Из E радиусом EC проводим дугу CF, пересекая ею диаметр AB в точке F. Из C радиусом CF проводим дугу FG, пересекая ею данную окружность в точке G, тогда $CG = CF$ есть одна из сторон искомого пятиугольника. Проведя тем же радиусом дугу из центра G, получаем следующую вершину M искомой фигуры и т. д. (рис. 120).

Отметим, что отрезок OF равен стороне правильного, вписанного в данную окружность десятиугольника, т. е.

$$CN = NL = LQ = \ldots = HC = OF.$$

Поэтому можно ограничиться только построением отрезка $OF = a_{10}$, затем строим все вершины правильного десятиугольника, соединив их через одну, получим правильный пятиугольник.

Задача 4. Вокруг данной окружности описать квадрат и правильный восьмиугольник.

Проведем два взаимно перпендикулярных диаметра AOB и COD. Из их концов, как из центров, описываем четыре окружности радиусами, равными радиусу заданной окружности $R = OA$. Точки E, F, G и H их пересечения являются вершинами искомого квадрата (рис. 121).

Для построения восьмиугольника проведем диагонали построенного квадрата. В точках пересечения диагоналей с окружностью проведем касательные к окружности до их пересечения со сторонами квадрата. Получим вершины искомого восьмиугольника.

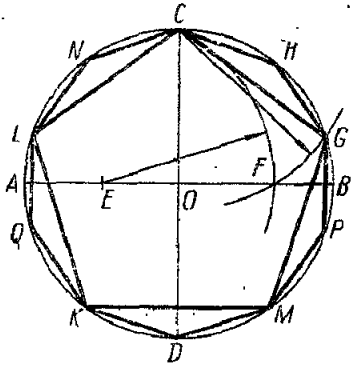


Рис. 120.

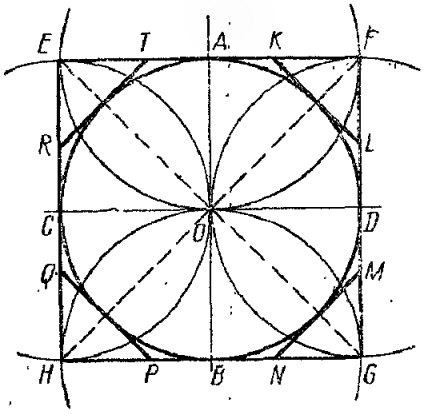


Рис. 121.

Упражнения. 1. Построить правильные, описанные вокруг данной окружности треугольник и шестиугольник.

2. Построить правильные описанные вокруг данной окружности пятиугольник и десятиугольник.

§ 27. Сводная таблица частных случаев четырехугольников

Введем обозначения: a, b, c, d — стороны, α, β, γ, δ — углы, h — высота, p — полупериметр, k, l — диагонали, φ — угол между диагоналями, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, S — площадь.

Таблица 3

Вид четырехугольника	Определения, формулы, свойства, соотношения между элементами
Трапеция	$c \parallel a$; c и a — основания; b и d — боковые стороны. Средняя линия m (отрезок EF, соединяющий середины боковых сторон) параллельна основаниям и равна их полусумме: $m = \frac{a+c}{2}$; $S = mh = \frac{a+b}{2} h = \frac{1}{2} kl \sin \varphi$. Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем середины оснований на расстоянии $\frac{h}{3} \cdot \frac{a+2c}{a+c}$ от нижнего основания.
Равнобочная трапеция	$c \parallel a$, $b = d$; $h^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$; $k = l$; $\alpha = \delta$; $\beta = \gamma$
Вписанный четырехугольник	$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$; $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; $R = \frac{1}{4S} \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$; $l = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$ (l — диагональ, замыкающая стороны a и b); $k = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$ (k — диагональ, замыкающая стороны a и d); $kl = ac + bd$ (теорема Птолемея)
Описанный четырехугольник	$a + c = b + d$; $S = pr$
Параллелограмм	$a \parallel c$, $b \parallel d$; $a = c$, $b = d$; $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$; $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$. Диагонали пересекаясь делятся взаимно пополам; точка пересечения диагоналей — центр тяжести, $k^2 + l^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$; $S = ab \sin \alpha = ah = \frac{1}{2} kl \sin \varphi$
Прямоугольник	$a \parallel c$, $b \parallel d$; $a = c$, $b = d$; $k = l$, $k^2 = a^2 + b^2$; $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$; $S = ab = \frac{1}{2} l^2 \sin \varphi$

Продолжение табл. 3.

Вид четырехугольника	Определения, формулы, свойства, соотношения между элементами
Ромб	$a = b = c = d;\ k \perp l,\ \varphi = 90°,\ k^2 + l^2 = 4a^2;\ \alpha = \gamma;$ $\beta = \delta;\ \alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°;$ $S = \frac{1}{2} kl = a^2 \sin \alpha$
Квадрат	$a = b = c = d;\ \alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°;\ k \perp l,\ \varphi = 90°,$ $k = l = a\sqrt{2};\ S = a^2 = \frac{1}{2} l^2;\ R = \frac{1}{2} l;\ r = \frac{1}{2} a.$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

Прежде всего рассмотрим простейшие построения на плоскости, используемые при решении более сложных задач этого типа.

§ 28. Простейшие задачи на построение

1. Разделить данный отрезок пополам.

Из концов A и B данного отрезка AB одним и тем же произвольным, но большим половины отрезка AB, радиусом R описываем две дуги, которые пересекаются в двух точках C и D. Точки C и D соединяем прямой CD. Точка N пересечения прямых AB и CD является искомой, делящей отрезок AB пополам (рис. 122).

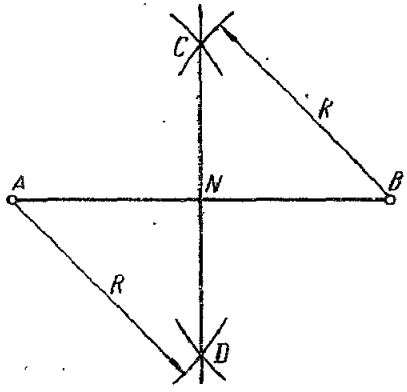


Рис. 122.

2. Восстановить перпендикуляр к данной прямой в данной на ней точке N.

Построение можно выполнить, применяя предыдущий прием. На данной прямой AB следует лишь отложить по обеим сторонам от точки N равные отрезки $AN = NB$, а затем повторить все построение, указанное на рис. 122.

Можно поступить также следующим образом. Взяв произвольную

точку O вне данной прямой AB, проводим из нее, как из центра, окружность радиуса ON. Через вторую точку M пересечения окружности O с прямой AB проводим диаметр MOK.

Соединив конец диаметра K с точкой N, получаем $KN \perp AB$, так как вписанный угол KNM опирается на диаметр (см. § 22).

Этим способом удобно восстанавливать перпендикуляр в конце отрезка, не продолжая его, а также в точке, лежащей близко к краю чертежного листа.

3. Опустить перпендикуляр на заданную прямую из данной точки C, лежащей вне ее.

Построение можно выполнить, применяя прием деления отрезка пополам. Следует лишь получить на заданной прямой две засечки A и B при помощи дуги с центром в точке C произвольного радиуса R большего, чем расстояние от точки C до прямой AB. Выполнить рисунок.

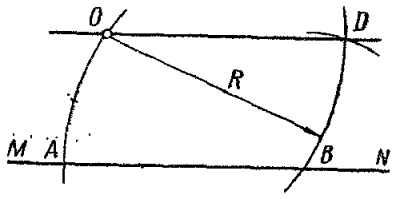


Рис. 123.

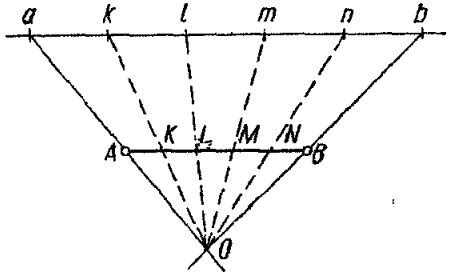


Рис. 124.

4. Через данную точку O провести прямую, параллельную заданной прямой MN.

Описываем дугу произвольным радиусом R с центром в точке O. Из точки пересечения B, лежащей на заданной прямой MN, как из центра, тем же радиусом R описываем дугу OA. Затем раствором циркуля радиуса AO из точки B делаем засечку и получаем точку D. Прямые OD и MN параллельны (рис. 123).

5. Разделить данный отрезок AB на данное число равных частей.

Проводим прямую ab, параллельную AB, на которой откладываем заданное число равных отрезков произвольной длины, например $ak = kl = lm = mn = nb$ (рис. 124). Далее, проводим прямые aA, bB и через точку их пересечения O проводим лучи kO, lO, mO, nO, которые и пересекут AB в точках K, L, M, N, делящих AB на заданное число равных частей (в нашем примере на 5).

6. Данный отрезок разделить на части, пропорциональные данным величинам.

Построение аналогично описанному в задаче 5. Следует лишь на прямой ab отложить отрезки, равные данным величинам.

7. При вершине N и луче NM построить угол, равный заданному углу ABC.

Из вершины B описываем дугу pq произвольного радиуса и тем же радиусом из центра N проводим дугу, пересекающую луч NM в точке P. Из точки P радиусом, равным отрезку pq, делаем засечку и найденную точку Q соединяем с вершиной N. Угол QNM — искомый (рис. 125).

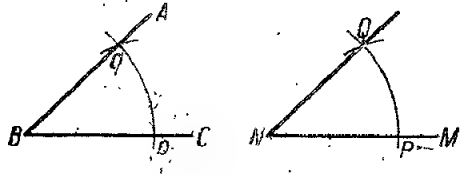


Рис. 125.

8. Построить углы, равные 30, 60 и 90°.

Из концов A и B произвольного отрезка AB, как из центров, описываем радиусом $R = AB$ две дуги. Точки их пересечения C и D соединяем прямой, которая пересечет отрезок AB в его середине O. Точку A соединяем прямой с точкой C. Тогда $\angle ACO = 30°$, $\angle CAO = 60°$, $\angle AOC = 90°$. Построить самостоятельно рисунок.

9. Построить угол, равный 45°.

На сторонах прямого угла BAC откладываем равные отрезки AB и AC и соединяем точки B и C. Отрезок BC образует с AC и AB углы по 45°. Выполнить рисунок.

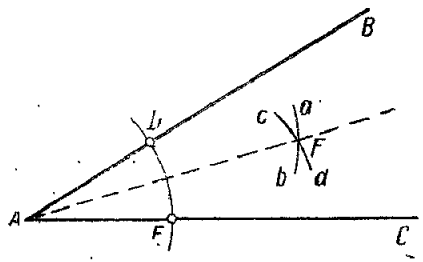


Рис. 126.

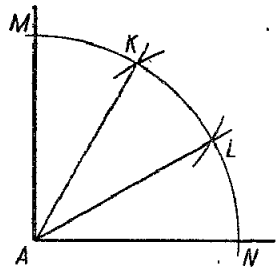


Рис. 127.

10. Данный угол BAC разделить пополам.

Из вершины A произвольным радиусом проводим дугу DE. Из точек D и E ее пересечения со сторонами AB и AC описываем произвольными равными радиусами дуги ab, cd. Точку их пересечения F соединяем с A; полученная прямая AF делит угол BAC пополам, т. е. является его биссектрисой (рис. 126).

11. Разделить прямой угол на три равные части.

Произвольным радиусом проводим дугу с центром в вершине A данного угла до ее пересечения в точках M и N с его сторонами.

Этим же радиусом из точек M и N, как из центров, на дуге MN делаем две засечки K и L, которые соединяем с вершиной A (рис. 127):

$$\angle MAK = \angle KAL = \angle LAN = 30°.$$

12. Разделить данный угол BAC на три равные части.

С помощью линейки без делений и циркуля точно выполнить это построение, которое называют трисекцией угла, нельзя. Однако с помощью циркуля и меченой линейки (т. е. линейки с нанесенной на нее равномерной шкалой, например миллиметровой) трисекцию угла легко выполнить следующим образом. Произвольным радиусом AC описываем из вершины угла A окружность. Продолжаем AC за точку A. Кладем меченую линейку так, чтобы она проходила через B, и вращаем ее вокруг B до тех пор, пока отрезок ED между окружностью и прямой AK не станет равным радиусу AC. Тогда угол EDF есть треть угла BAC (рис. 128). Доказать это, пользуясь тем, что согласно построению, $\triangle DEA$ равнобедренный, а тогда по теореме о внешнем угле треугольника

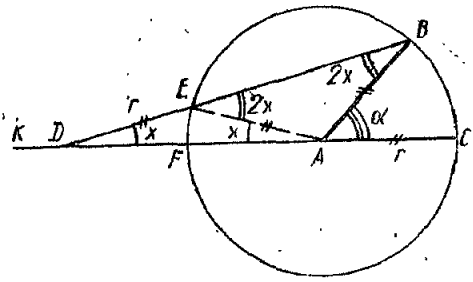


Рис. 128.

$$\angle BEA = 2x; \quad \angle BAC = \alpha = x + 2x, \text{ где } x = \angle EDA.$$

13. Через две данные точки A и B провести окружность заданным радиусом R.

Из точек A и B проводим дуги ef и mn радиусом R. Точка их пересечения есть центр искомой окружности. Построить рисунок.

Замечание. Задача имеет решение только в том случае, если R больше или равно половине отрезка AB.

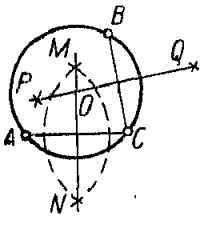


Рис. 129.

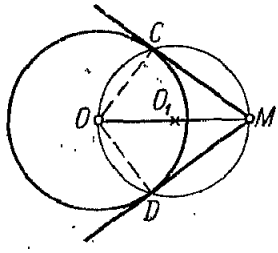


Рис. 130.

14. Провести окружность через три данные точки A, B, C, не лежащие на одной прямой.

Проводим перпендикуляры MN и PQ к отрезкам AC и BC через их середины. Точка пересечения этих перпендикуляров O есть центр искомой окружности (рис. 129).

15. Найти центр данной окружности или ее дуги.

На данной окружности или дуге выбираем три точки. Затем поступаем, как в предыдущей задаче. Точки следует брать на возможно более далеком расстоянии друг от друга.

16. Данную дугу окружности разделить пополам.

Концы дуги соединяем хордой. Проводим перпендикуляр через середину хорды (см. задачу 1), который и разделит дугу пополам.

17. Через данную точку M провести касательную к данной окружности O.

а) Точка M лежит на окружности. В этом случае в конце M радиуса OM восстанавливаем перпендикуляр $AM \perp OM$. Прямая AM является искомой касательной (построить рисунок).

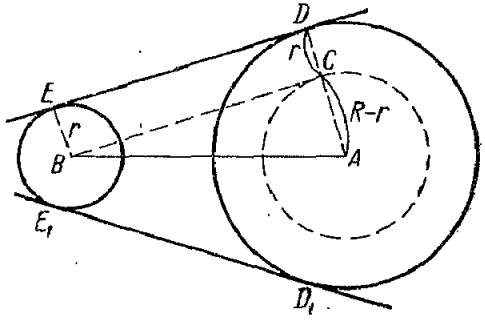


Рис. 131.

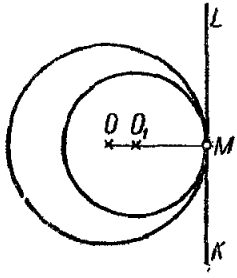


Рис. 132.

б) Точка M лежит вне окружности. Соединив точки O и M, на отрезке OM, как на диаметре, строим окружность O_1, центр которой O_1 есть середина отрезка OM (рис. 130). Точки C и D пересечения окружностей O и O_1 соединяем с точкой M. Прямые CM и DM — искомые касательные, так как $\angle OCM = \angle ODM = 90°$, как вписанные в окружность O_1 углы, опирающиеся на диаметр OM.

18. К двум данным окружностям провести общую внешнюю касательную.

а) В случае, когда радиусы данных окружностей равны между собой, задача имеет два решения. Через центры A и B проводим диаметры KK_1 и LL_1, перпендикулярные к линии центров AB. Проведя KL и K_1L_1, имеем искомые решения. Построить рисунок.

б) Пусть радиусы данных окружностей не равны $R > r$; из центра большего круга A проводим окружность радиусом $AC = R - r$. К ней проводим касательную BC из центра B меньшего круга. Центр A соединяем с точкой касания C прямой. Продолжаем её и получаем на большей окружности точку D. Проводим отрезок BE перпендикулярно к BC до пересечения в точке E с меньшей окружностью. Точки D и E соединяем. Прямая DE — искомая касательная.

Задача допускает два решения (DE и D_1E_1), если меньший круг не лежит целиком внутри большего (рис. 131).

В случае внутреннего касания задача имеет одно решение. Через точку касания M проводим прямую, перпендикулярную радиусу OO_1M (рис. 132).

19. К двум данным окружностям провести общую внутреннюю касательную.

В случае внешнего касания заданных окружностей A и B задача имеет лишь одно решение. Через точку касания M проводим прямую, перпендикулярную линии центров AB.

Если окружности не имеют общих точек и не лежат одна внутри другой, то задача имеет два решения.

Из центра A большей окружности проведем окружность радиусом $AC = R + r$.

Из центра B меньшей окружности проведем касательные к построенной вспомогательной окружности. Точку касания C и центр A соединим прямой AC, которая пересечет бо́льшую окружность в точке D. Из точки B проведем радиус $BE \perp BC$. Точку E соединим с точкой D. Прямая ED является искомой касательной. Аналогично строится и вторая внутренняя касательная E_1D_1 (рис. 133). Точка N пересечения внутренних касательных всегда лежит на линии центров.

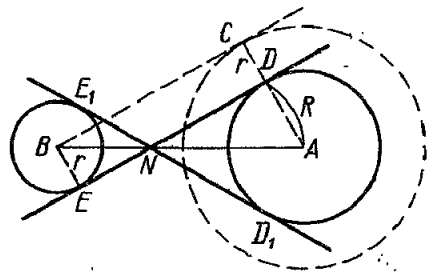


Рис. 133.

В случае, когда одна из окружностей лежит полностью внутри другой или пересекает её в двух точках, задача решения не имеет.

Рассмотрите также случай $R = r$ и докажите, что в этом случае касательная пройдет через середину отрезка AB.

20. Построить квадрат по его стороне AB или по его диагонали AC.

а) Пусть задана сторона квадрата AB. В точках A и B восстановим перпендикуляры и на них от точек A и B отложим отрезки $AD = BC = AB$. Соединим точки D и C. Полученная фигура — квадрат.

б) Пусть задана диагональ квадрата AC. Разделим отрезок AC пополам и через его середину N проведем перпендикулярвую прямую. От точки N на построенном перпендикуляре в обе стороны отложим отрезки $\frac{1}{2}AC$. Пусть концы этих отрезков суть B и D. Соединив последовательно точки A, B, C и D, мы и получим искомый квадрат. Выполнить построение.

Аналогично строится ромб по его диагоналям. Отметим, что по данной стороне задача построения ромба имеет бесчисленное множество решений.

21. Построить параллелограмм по его сторонам и высоте.

Пусть даны стороны параллелограмма a, b и его высота h_a. На произвольной прямой l от произвольно взятой на ней точки A отложим отрезок $AD = a$. На расстоянии h_a от прямой l проведем прямую $k \parallel l$. Из точки A, как из центра, радиусом $AB = b$ сделаем на прямой k засечку. От точки B на прямой k отложим отрезок $BC = a$. Соединим точки A, B и точки D, C (рис. 134).

Фигура $ABCD$ — параллелограмм. Задача имеет два решения.

Отметим, что в частном случае $h_a = b$ фигура $ABCD$ — прямоугольник, а при $a = b > h_a$ получим ромб. Если же $h_a > b$, задача решений не имеет.

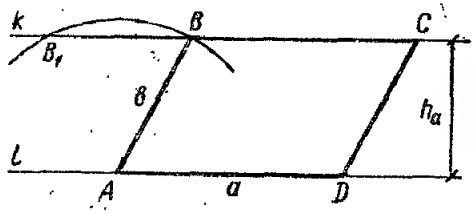


Рис. 134

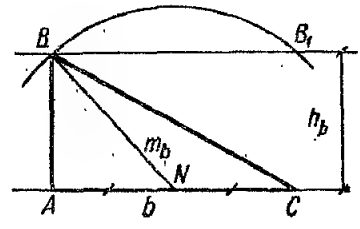


Рис. 135.

22. Построить треугольник по основанию a, боковой стороне b и высоте h_a.

Начало построения аналогично предыдущей задаче. Следует лишь, построив точку B (рис. 134), соединить её с точкой D, и мы получим $\triangle ABD$, который и будет искомым.

Как и в предыдущей задаче, в случае $h_a > b$ решений нет, в случае $h_a = b$ решение единственное, в случае $h_a < b$ задача имеет два решения.

23. Построить треугольник по основанию b, медиане m_b и высоте h_b.

Искомый треугольник строится аналогично тому, как в предыдущей задаче. Но в данной задаче засечки на прямой, параллельной основанию b и отстоящей от него на расстоянии h_b, следует делать из середины N основания радиусом, равным заданной медиане m_b (рис. 135).

Исследуйте, сколько будет решений в случае $m_b > h_b$ и $m_b < h_b$, а также выполните построение для случая $m_b = h_b$.

24. Построить треугольник по трем сторонам a, b, c.

Отложим на произвольно взятой прямой от какой-либо ее точки B один из данных отрезков, например, $BC = a$. Из точек B и C радиусами, равными соответственно $R_1 = b$ и $R_2 = c$, проведем дуги двух окружностей до их пересечения в точке A (рис. 136). $\triangle ABC$ — искомый.

Условие существования решения: сумма двух любых сторон треугольника должна быть больше третьей стороны.

Эта задача как составная часть встречается при решении многих более сложных задач на построение.

25. Построить треугольник по двум сторонам a, c и медиане m_b.

Строим $\triangle BDC$ (рис. 137) по трем сторонам $BC = a$, $BD = 2m_b$, $DC = c$. Через середину O стороны BD проводим прямую COA, где $OC = OA$. Точку B соединяем с точкой A; $\triangle ABC$ — искомый.

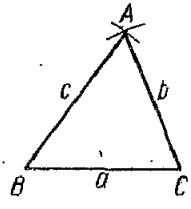


Рис. 136.

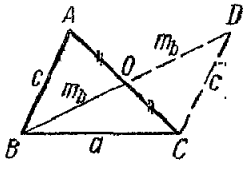


Рис. 137.

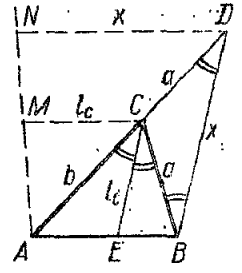


Рис. 138.

Аналогично строится параллелограмм по двум его сторонам и диагонали, а также параллелограмм по его диагоналям и одной из сторон.

При этом следует учесть, что диагонали параллелограмма в точке пересечения взаимно делятся пополам. Выполнить эти построения самостоятельно.

26. Построить треугольник по двум сторонам a, b и биссектрисе угла между ними l_c.

Предположим, что $\triangle ABC$ — искомый. Продолжив сторону AC и отложив на ее продолжении отрезок $CD = BC = a$, соединим точки B и D (рис. 138).

Треугольник BCD — равнобедренный, причем $\angle D = \angle B = \angle ECB$, так как согласно теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle ACB = \angle B + \angle D = 2\angle D,$$

а с другой стороны, по условию задачи l_c биссектриса и, следовательно,

$$\angle ACB = 2\angle ECB = 2\angle D.$$

Углы ECB и CBD есть внутренние накрестлежащие, поэтому из их равенства вытекает, что $EC \parallel BD$, а тогда $\triangle AEC \sim \triangle ABD$ и сторона $BD = x$ будет определяться из пропорции

$$\frac{x}{l_c} = \frac{a+b}{b}.$$

Итак, мы получили все необходимые данные для того, чтобы фактически построить искомый треугольник.

Прежде всего определим отрезок x, как четвертый, пропорциональный к трем заданным отрезкам b, $a+b$, l_c. Для этого на произвольно выбранной прямой AD последовательно откладываем отрезки $b = AC$ и $a = CD$. Из точки C в произвольном направлении откладываем заданный отрезок $l_c = CM$ и через точку M продолжаем луч AM, а затем проводим $DN \parallel CM$. Отрезок DN равен искомому отрезку x. Найдя x, строим на отрезке CD вспомогательный $\triangle CDB$ по известным трем сторонам $CD = BC = a$ и $DB = x$ (см. задачу 24). Соединив найденную вершину B с точками A и C, мы получим искомый треугольник ABC.

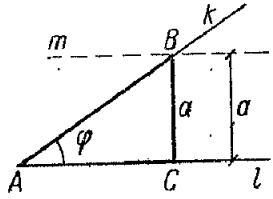


Рис. 139.

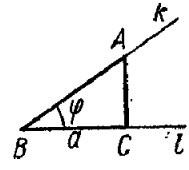


Рис. 140.

27. Построить прямоугольный треугольник по его катету a и одному из острых углов φ.

а) Если данный катет a противолежащий к данному углу φ, то на произвольной прямой l в какой-либо её точке A строим луч k под заданным углом φ и проводим прямую $m \parallel l$ на высоте a (рис. 139). Из точки пересечения B луча k с прямой m опускаем перпендикуляр BC на прямую l. Треугольник ABC — искомый.

б) Если данный катет a прилежащий к углу φ, то откладываем этот катет от точки B на прямой l (рис. 140). Далее в другом конце C катета a восстанавливаем к нему перпендикуляр до пересечения с лучом k в точке A. $\triangle ABC$ — искомый.

28. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и острому углу α.

Из произвольно взятой точки B на прямой l под углом α к ней проведём луч BN. На луче BN от точки B отложим отрезок $BA = c$. Из конца A отрезка BA опустим перпендикуляр AC на прямую l. $\triangle ABC$ — искомый. Построить рисунок.

Построение прямоугольного треугольника по двум данным катетам, а также прямоугольника по его сторонам осуществляется весьма просто: на сторонах прямого угла от его вершины следует отложить данные отрезки. В случае треугольника их концы соединяем, а в слу-

чае прямоугольника через концы этих отрезков проводим прямые, параллельные сторонам прямого угла, до их пересечения. Выполнить построение.

29. Построить треугольник по основанию a и медианам боковых сторон m_b и m_c.

Строим треугольник AOB по трем сторонам a, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$ (рис. 141). Отложив на продолжении BO отрезок $OM = \frac{1}{3}m_b$ и на продолжении AO отрезок $ON = \frac{1}{3}m_c$, проводим прямые AM и BN до их пересечения в точке C. $\triangle ABC$ — искомый.

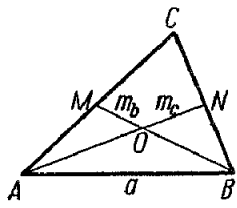


Рис. 141.

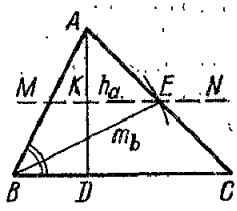


Рис. 142.

30. Построить треугольник по его высоте h_a, медиане m_b и углу B.

Построим прямоугольный треугольник ABD по стороне $AD = h_a$ и углу B (рис. 142). Через середину K катета AD проведем прямую $MN \parallel BD$. Радиусом $R = m_b$ из точки B проводим дугу до ее пересечения в точке E с прямой MN. Продолжим прямые BD и AE до их пересечения в точке C. $\triangle ABC$ — искомый.

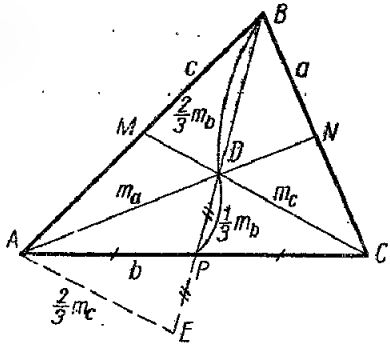


Рис. 143.

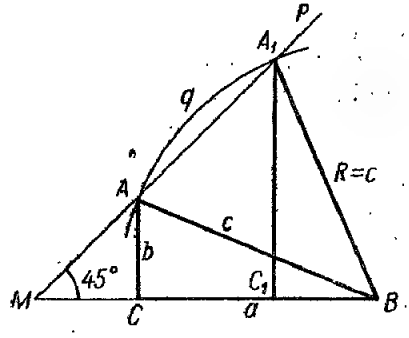


Рис. 144.

31. Построить треугольник по трем медианам.

Построим вспомогательный треугольник AED по трем сторонам $AE = \frac{2}{3}m_c$, $AD = \frac{2}{3}m_a$, $DE = \frac{2}{3}m_b$ (рис. 143). В этом треугольнике проведем медиану AP и продолжим её за точку P на отрезок $PC = AP$. Точку C соединим с точкой D и, продолжив отрезок CD, отложим на нем $CM = m_c$. От точки A на продолжении отрезка AD

отложим $AN = m_a$. Через точки A и M, N и C проведем прямые до их пересечения в точке B. $\triangle ABC$ — искомый.

32. Построить прямоугольный треугольник по сумме его катетов $a + b$ и гипотенузе c.

Из конца M отрезка $BM = a + b$ проводим луч MP под углом 45° к отрезку MB (рис. 144). Из точки B, как из центра, радиусом $R = c$ проводим дугу q до её пересечения с лучом MP и из полученных точек A и A_1 опускаем перпендикуляры AC и A_1C_1 на прямую MB. Треугольники ABC и A_1BC_1 — искомые ($BC = A_1C_1 = a$; $AC = BC_1 = b$)

В случае двух точек пересечения дуги q с лучом AP задача имеет два решения.

В случае касания дуги q с лучом AP — одно решение.

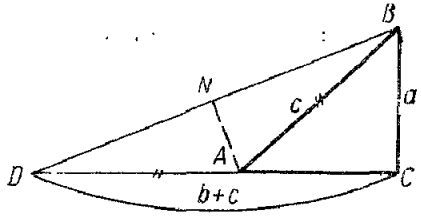


Рис. 145.

Исследуйте, какое дополнительное условие надо наложить на катеты a и b для того, чтобы решение было единственным.

33. Построить прямоугольный треугольник по его катету a и сумме другого катета с гипотенузой $b + c$.

Строим прямоугольный треугольник BDC по катетам $BC = a$, $DC = b + c$ (рис. 145). Через середину N стороны BD проводим перпендикуляр до его пересечения с прямой DC в точке A. Соединяем точки A и B. $\triangle ABC$ — искомый ($AD = AB$ как стороны равнобедренного треугольника ABD).

34. Построить равнобедренный треугольник по его основанию c и радиусу вписанной окружности r.

На произвольной прямой отложим отрезок $AB = c$ и в точке N, которая делит его пополам, восстановим перпендикуляр. На этом перпендикуляре отложим отрезок $ON = r$ и из точки O, как из центра, проводим окружность заданного радиуса r, которая будет касаться основания AB. Из точек A и B проводим касательные к данной окружности O (см. рис. 130), которые пересекутся в точке C. Полученный треугольник ABC — искомый. Построить рисунок.

35. Построить треугольник, если даны два его угла A и B и сумма двух его сторон $b + c$.

Предположим, что задача решена и $\triangle ABC$ есть искомый. Найдем связь между искомыми и данными его элементами. Отложим на продолжении стороны AB отрезок $DA = AC$ и соединим точки C и D. Треугольник ACD — равнобедренный; следовательно, учтя теорему о внешнем угле треугольника, находим, что $\angle CDA = \angle DCA = \frac{1}{2}\angle A$ (рис. 146).

В треугольнике BCD известно основание $DB = b + c$, равное заданному отрезку $(b + c)$, и два прилежащих угла: $\angle CDB = \frac{1}{2}\angle A$ и $\angle CBD = \angle B$, так что его легко построить. Выполнив фактически это построение, с которого и надо начинать решение данной задачи, получим две вершины B и C искомого треугольника. Третья его вершина A одновременно является вершиной вспомогательного равнобедренного треугольника DCA, в котором известно основание CD и углы при основании, равные $\frac{1}{2}\angle A$. Этот треугольник также легко построить; в результате получим вершину A. Соединив точки A и C, получаем искомый треугольник ABC.

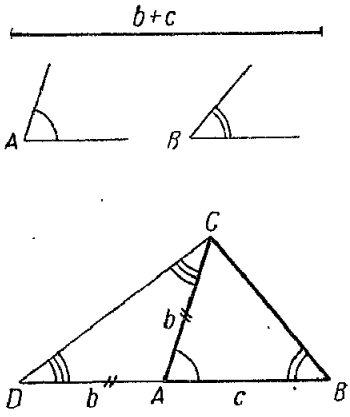


Рис. 146.

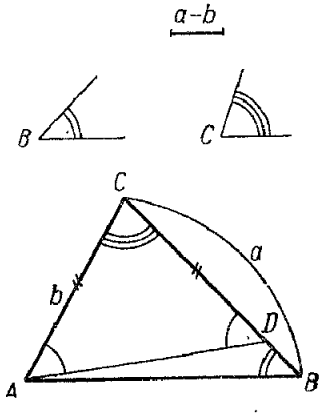


Рис. 147.

36. Построить треугольник, если даны разность сторон $a - b$ и два угла B и C.

Предположим, что $\triangle ABC$ — искомый (рис. 147). На стороне BC от точки B откладываем отрезок $BD = a - b$ и соединяем точки A и D. Тогда $DC = AC = b$,

$$\angle CAD = \angle ADC = \frac{180° - \angle C}{2} = 90° - \frac{1}{2}\angle C.$$

Следовательно,

$$\angle ADB = 180° - \left(90° - \frac{\angle C}{2}\right) = 90° + \frac{1}{2}\angle C.$$

Поскольку $DB = a - b$, то легко построить $\triangle ABD$ по известному основанию, равному заданному отрезку $(a - b)$ и двум прилежащим

углам $\angle ADB = 90° + \frac{1}{2}\angle C$ и $\angle DBA = \angle B$, и определить таким образом положение вершин A и B. После этого вершина C определится как вершина равнобедренного треугольника ADC, для которого будут известны основание AD и $\angle ADC = \angle CAD = 90° - \frac{1}{2}\angle C$.

37. Построить треугольник, если даны его периметр $2p = a + b + c$ и два угла A и B.

Пусть $\triangle ABC$ построен (рис. 148). Продолжив в обе стороны отрезок AB, отложим на прямой AB отрезки $AD = b$ и $BE = a$ и соединим вершину C с точками D и E. Тогда $DE = a + b + c$;

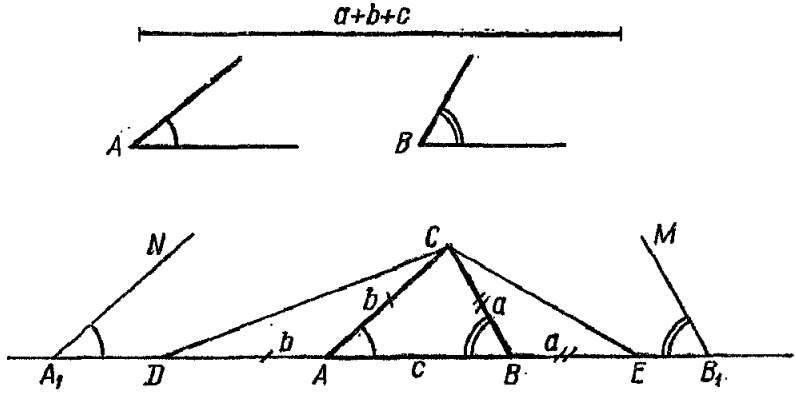


Рис. 148.

$\angle D = \frac{1}{2}\angle A$; $\angle E = \frac{1}{2}\angle B$. Следовательно, $\triangle DCE$ легко построить по заданному основанию и двум прилежащим углам. Этим определяется вершина C. Далее через точку C следует провести прямые AC и BC так, чтобы они составляли с прямой DE заданные углы. Для этого, построив на прямой DE при произвольных точках A_1 и B_1 углы, равные заданным $\angle A_1 = \angle A$ и $\angle B_1 = \angle B$, проводим через точку C $AC \parallel A_1N$, $BC \parallel B_1M$.

38. Построить параллелограмм по его диагоналям d_1, d_2 и одной из сторон, например a.

По трем сторонам $AB = a$, $AO = \frac{1}{2}d_1$, $BO = \frac{1}{2}d_2$ строим треугольник AOB, стороны которого AO и BO продолжим за точку O на отрезки, равные соответственно $OC = AO$ и $OD = BO$ (рис. 149). Последовательно соединяем точки A, B, C, D. Фигура $ABCD$ — искомый параллелограмм.

39. Построить трапецию по четырем сторонам a, b, c, d ($a \parallel b$).

Строим $\triangle CBE$ по трем сторонам $EC = c$, $CB = d$ и $BE = a - b$. На продолжении BE откладываем $AE = b$. Из точки A радиусом $R_1 = c$ и из точки C радиусом $R_2 = b$ проводим две дуги, которые пересекутся в точке D. Соединим точку D с точками A и C (рис. 150). Фигура $ABCD$ —искомая трапеция.

40. Построить трапецию по основаниям a, b, боковой стороне c и высоте h.

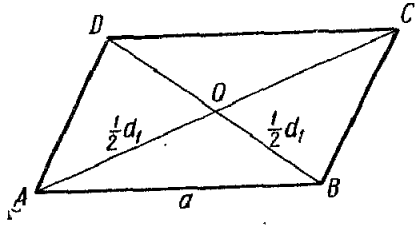


Рис. 149.

Проведем две параллельные прямые на расстоянии h. На одной из параллельных прямых отложим отрезок $AB = a$. Из точки A радиусом $R = c$ проведем дугу до её пересечения с другой параллельной прямой в точке D (рис. 151). От точки D отложим отрезок $DC = b$. Соединим точки C и B. Трапеция $ABCD$ есть искомая.

41. К стороне заданного острого угла провести перпендикулярную прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла, был бы равен данному отрезку a.

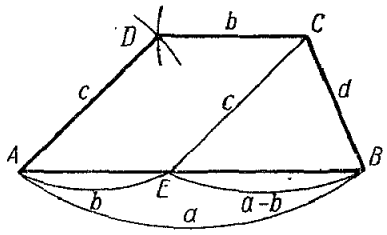


Рис. 150.

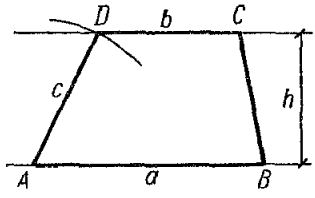


Рис. 151.

Из произвольной точки N, лежащей на стороне AB данного острого угла ABC, восстановим перпендикуляр и на нем от точки N внутрь угла отложим отрезок $NM = a$.

Проведем прямую $MK \parallel AB$ до её пересечения со стороной угла BC в точке K. Из точки K опустим перпендикуляр KL на сторону AB. Прямая KL искомая, так как $KL \perp AB$ и $KL = MN = a$ (рис. 152).

42. Через точку N внутри данного угла ABC провести прямую, отрезок которой, заключенный внутри угла, делился бы точкой N пополам.

Через вершину угла B и данную точку N проведем прямую, на продолжении которой от точки N отложим отрезок $NK = BN$ (рис. 153).

Через точку K проведем прямую, параллельную стороне AB, до её пересечения со стороной BC в точке L. Через точки L и N проведем прямую LNM, которая и будет искомой.

Действительно, $\triangle BMN = \triangle KLN$, так как $\angle BNM = \angle LNK$, $\angle LKN = \angle NBM$ и по построению $BN = NK$. Следовательно, $LN = MN$.

43. Провести биссектрису угла, вершина которого срезана и лежит за пределами рисунка.

Из двух произвольных точек K и L, взятых на сторонах l и m данного угла, восстанавливаем перпендикуляры, на которых откладываем равные отрезки $KM = LN$ (рис. 154).

Через точки M и N проводим параллельно сторонам данного угла прямые $MO \parallel l$, $NO \parallel m$, которые, пересекаясь, образуют $\angle NOM$.

Биссектриса вспомогательного угла NOM, которую строим изложенным ранее приемом, будет одновременно и биссектрисой данного угла со сторонами m и l.

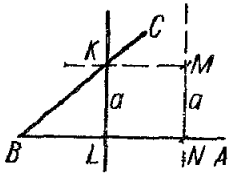


Рис. 152.

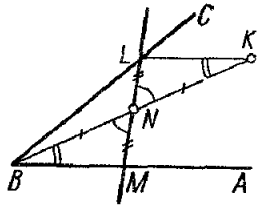


Рис. 153.

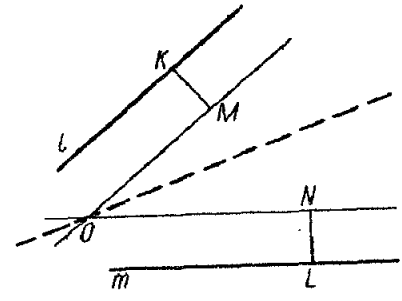


Рис. 154.

44. Построить геометрическое место точек *, из которых данный отрезок AB виден под заданным углом α.

Отложим на произвольной прямой отрезок AB. Из конца этого отрезка A под заданным углом α проведем луч AP (рис. 155). От луча AP по другую сторону отрезка AB проведем перпендикуляр $AQ \perp AP$. Из середины N отрезка AB восстановим перпендикуляр $NM \perp AB$.

Из точки O пересечения прямых AQ и NM, как из центра, радиусом $R = AO$ проведем окружность. Любой из вписанных углов ACB, ADB, AFB и т. д. равен заданному углу α, так как все эти углы опираются на дугу $ANB = 2\alpha$ (см. § 22). Следовательно, дуга ADB и является искомым геометрическим местом точек, так как только для каждой точки этой дуги отрезок AB виден под заданным углом α. Точки любой другой дуги или линии, а также и любые другие изолированные точки этим свойством обладать не будут.

---

* См. § 29

Отметим, что из каждой точки дополняющей дуги ANB отрезок AB виден под одним и тем же углом

$$\beta = 180° - \alpha.$$

Сами точки A и B надо исключить из рассмотрения. Построенную дугу ADB называют также *дугой, вмещающей данный угол* α.

45. Построить треугольник по основанию a, высоте h_a и углу при вершине α (рис. 156).

Строим дугу $MABN$, вмещающую данный угол α и опирающуюся на данную хорду $MN = a$ (см. предыдущую задачу). Из произвольной точки Q прямой MN восстанавливаем к ней перпендикуляр и на нем от точки Q откладываем заданную высоту h_a. Проводим прямую $l \parallel MN$, проходящую на расстоянии h_a от прямой MN.

Если прямая l пересекает окружность O в двух точках, задача имеет два решения.

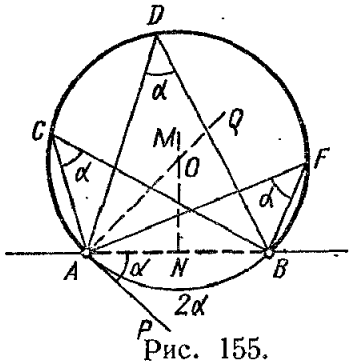


Рис. 155.

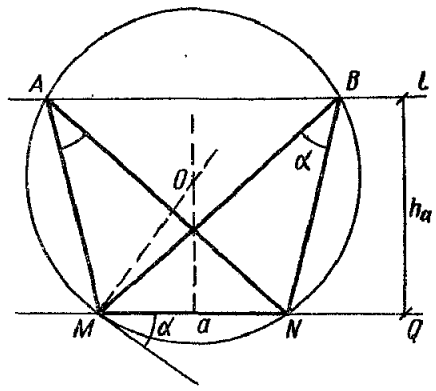


Рис. 156.

Если прямая l является касательной к окружности O, задача имеет одно решение.

Исследуйте, в каких случаях задача вообще не имеет решений.

46. Через данную точку A провести прямую, от которой данная окружность O отсекала бы хорду данной длины a.

а) Если точка A лежит на данной окружности, то радиусом, равным a, из точки A, как из центра, делаем на окружности O две засечки (в случае $a < 2R$). Соединив точку A с двумя полученными точками, строим две искомые хорды.

Если $a = 2R$ задача имеет одно решение; если $a > 2R$ — решений нет.

б) Пусть точка A лежит в круге или вне круга O (рис. 157). Так как середины всех равных хорд, проведенных в данной окружности, составляют концентрическую окружность, которой касаются все эти хорды, то и искомая хорда касательна к той же окружности.

Построим эту вспомогательную окружность, для чего из произвольной точки M заданной окружности делаем засечку радиусом $R = a$ и полученную точку N соединим с M. Затем, опустив из O перпендикуляр на MN, проведем из центра O вспомогательную окружность радиусом OK. Этой окружности должна касаться искомая хорда, а так как она должна проходить еще через точку A, то очевидно нужно из точки A провести касательные к внутренней окружности O. Прямые AB и AD и будут искомые.

47. Через точку N, данную внутри круга O, провести хорду так, чтобы она в этой точке делилась пополам.

В данном круге проведем радиус OD так, чтобы он проходил через точку N. Далее через точку N проведем прямую $l \perp OD$, которая пересечет окружность O в двух точках A и B. Хорда AB является искомой, так как $AN = NB$. Построить рисунок.

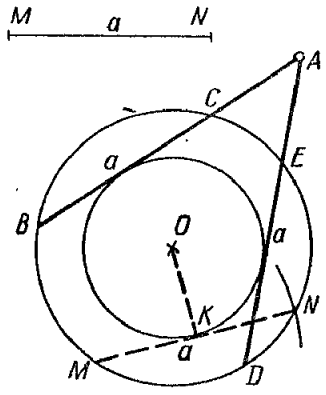


Рис. 157.

48. К данной окружности O провести касательную, параллельную данной прямой l.

Из центра O опускаем перпендикуляр на данную прямую l и через точку его пересечения с данной окружностью проводим прямую, параллельную данной прямой l. Эта прямая и будет искомой касательной. Построить рисунок.

В заключение данного параграфа сделаем несколько замечаний о методах решения различных типов геометрических задач на построение при помощи циркуля и линейки. При решении этих задач их удобно располагать не в порядке возрастания степени трудности, а с учетом их особенностей. Такой подход дает возможность разработать некоторые общие методы для решения различных типов задач на построение, в результате чего решение многих сложных задач значительно облегчается.

Ниже кратко рассмотрены важнейшие методы решения геометрических задач на построение.

§ 29. Метод геометрических мест точек

Понятие о геометрическом месте точек является весьма важным не только в геометрии, но и в других разделах математики.

Замечание. Термин «геометрическое место точек» был введен еще древнегреческим ученым и философом Аристотелем (384—322 гг. до н. э.), который представлял себе линию, как некоторое «место», где могут быть размещены точки.

Понятие линии как следа движущейся точки, или как совокупности точек возникло значительно позже.

Соответственно новейшим взглядам на геометрические фигуры, базирующимся на теории множеств, следовало бы устаревший термин «геометрическое место точек» заменить современным научным термином «множество точек».

Однако в связи с тем, что по укоренившейся традиции терминами «геометрическое место точек», «метод геометрических мест» и другими пользуются еще миллионы преподающих и изучающих математику и эти термины употребляются в подавляющем большинстве научных и методических изданий, мы также используем ниже термин «геометрическое место точек», имея в виду строго научное понятие «множество точек, имеющих соответствующее условию данной задачи свойство».

Геометрическим местом точек называется множество всех точек, обладающих одним или несколькими общими свойствами. Это определение не утверждает, что точки некоторого геометрического места не могут иметь и других свойств, характерных лишь для части данных точек, или даже для одной из них.

Одно и то же условие может определять различные геометрические места точек в зависимости от того, где оно осуществляется: на прямой линии, на плоскости или в пространстве.

Если геометрическое место точек каким-либо образом определено, то наложение дополнительных условий существенно изменяет характер данного геометрического места, сужает его. Условия, определяющие геометрическое место точек, могут задаваться с помощью некоторых данных описательного характера, а также с помощью аналитических выражений: уравнений, их систем, неравенств и т. д.

Во втором случае используется принцип взаимно однозначного соответствия точек прямой линии и вещественных чисел, точек плоскости и пар вещественных чисел, точек трехмерного пространства и троек вещественных чисел, являющихся соответственно одномерными, двумерными и трехмерными координатами точки.

В элементарной математике рассматриваются также геометрические места точек на комплексной плоскости.

Примеры.

1. Геометрическим местом точек на прямой, равноудаленных от точек A и B этой прямой, является одна единственная точка C — середина отрезка AB. Геометрическим местом точек на плоскости, равноудаленных от концов отрезка AB, являются все точки перпендикуляра, проходящего через середину отрезка AB. Ни одна другая точка плоскости, которая не лежит на данном перпендикуляре, этим свойством не обладает и, следовательно, не принадлежит к рассматриваемому геометрическому месту точек.

В пространстве таким геометрическим местом точек будет плоскость, перпендикулярная к AB и проходящая через середину этого отрезка.

В этом параграфе рассматриваются лишь примеры геометрических мест точек на плоскости.

2. Геометрическим местом точек, равноудаленных на данное расстояние a от данной точки O, является окружность радиуса $R = a$ с центром в точке O.

3. Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон данного угла, является биссектриса этого угла, а геометрическим местом точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, являются биссектрисы вертикальных углов, образованных этими прямыми.

4. Геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин данного треугольника, является лишь одна точка — центр описанной вокруг этого треугольника окружности, а геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон данного треугольника, является центр вписанной в него окружности — точка пересечения биссектрис его внутренних углов.

5. Геометрическим местом точек, находящихся от данной прямой l на расстоянии a, являются две параллельные прямые, расположенные по обе стороны прямой l на расстоянии a от нее.

6. Геометрическим местом вершин треугольников, построенных на данном основании a и имеющих данную площадь S, являются две, параллельные основанию, прямые, находящиеся по обе стороны от него на расстоянии

$$h = \frac{2S}{a}.$$

7. Геометрическим местом центров окружностей равных радиусов R, касающихся данной окружности O радиуса R_1, является:

а) в случае $R > R_1$ — две окружности радиусов $R_2 = R_1 + R$ и $R_3 = R_1 - R$ с центрами в точке O;

б) в случае $R < R_1$ — две окружности радиусов $R_2 = R + R_1$ и $R_3 = R - R_1$ с центрами в точке O;

в) в случае $R = R_1$ — окружность удвоенного радиуса $R_2 = R + R_1 = 2R$ с центром в точке O и сама точка O, т. е. окружность нулевого радиуса $R_3 = R - R_1 = 0$.

Сущность решения задач на построение с помощью метода геометрических мест точек состоит в следующем:

а) из нескольких условий, данных в задаче, оставляют лишь одно, отбросив остальные. Этим самым задача превращается в неопределенную, т. е. такую, которая имеет бесконечное множество решений. Обычно это множество решений находится очень легко, так как является элементарным геометрическим местом точек.

б) построив соответствующее геометрическое место точек, рас-

сматривают какое-либо другое условие задачи и строят еще одно геометрическое место точек и т. д.

Общие точки, принадлежащие всем геометрическим местам, построенным по условиям задачи, и дают окончательный результат — искомую фигуру, линию и т. д.

При решении некоторых задач § 28 мы уже пользовались методом геометрических мест точек, например в задачах 21—24.

Задача 1. Найти геометрическое место точек, удаленных на расстояние b от прямой l и на расстояние a от точки O.

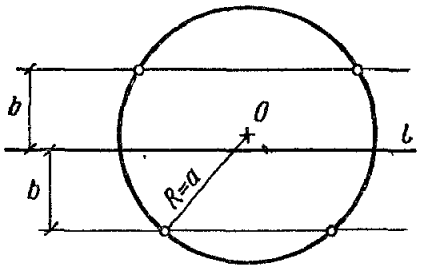


Рис. 158.

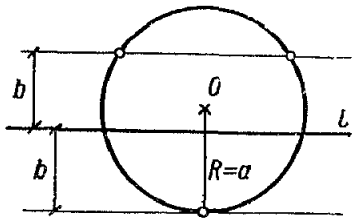


Рис. 159.

Решение. Геометрическим местом точек, равноудаленных от данной прямой l, будет пара параллельных прямых, находящихся по обе стороны прямой l на расстоянии b. Далее строим окружность с центром в точке O и радиусом $R = a$. Точки, принадлежащие обоим геометрическим местам, и будут искомыми.

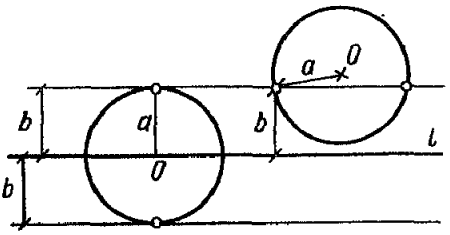


Рис. 160.

В зависимости от данных величин и их взаимного расположения, в искомое геометрическое место точек могут войти четыре точки (рис. 158), три точки (рис. 159), две точки (рис. 160) и лишь одна точка (рис. 161). Может представиться также случай, когда в искомое геометрическое место не войдет ни одной точки (рис. 162). Если обозначить расстояние от центра O до данной прямой l буквой d, то между величинами a, b и d для каждого из возможных в этой задаче случаев можно установить зависимость. Например, четвертый случай (рис. 161) будет иметь место, если

$$d = b - a \text{ или } d = b + a.$$

Рекомендуем читателю самостоятельно установить соотношения между величинами a, b и d во всех остальных случаях.

Задача 2. На стороне данного угла найти точку, равноудаленную от другой стороны и от данной внутри угла точки.

Решение. Пусть дан угол AOB и внутри него точка M (рис. 163). Проведем прямую OM. Из произвольной точки K стороны

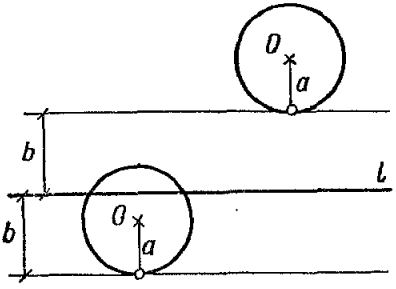


Рис. 161.

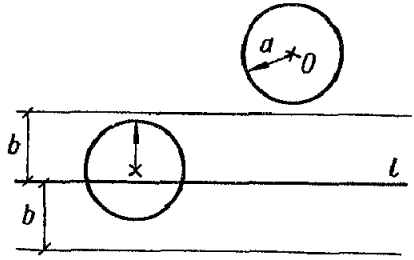


Рис. 162.

OB опустим на сторону OA перпендикуляр KL и из точки K, как из центра, дугой радиуса KL на прямой OM сделаем засечку N. Проведем $MP \parallel NK$ до пересечения с OB. Точка P будет искомая, так как $\triangle KNL \sim \triangle MPQ$, где Q — точка пересечения $PQ \perp OA$ с прямой OA.

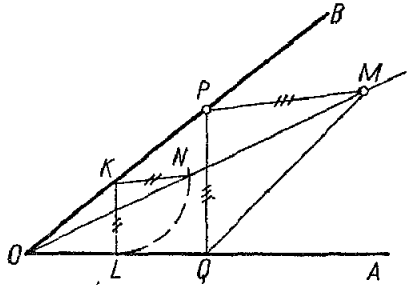


Рис. 163.

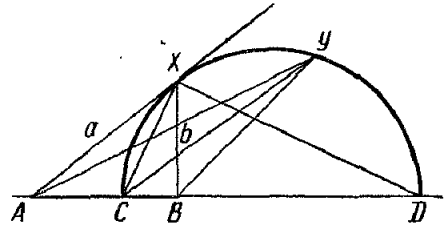


Рис. 164.

Задача 3. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых от концов данного отрезка есть заданная постоянная величина.

Дан отрезок AB (рис. 164) и некоторое число $\frac{a}{b}$. Радиусами, равными a и b (или радиусами, им пропорциональными), описываем из точек A и B, как из центров, две дуги. Точка X пересечения

этих дуг будет одной из искомых точек. Разделив угол AXB и смежный с ним пополам прямыми XC и XD, получим на прямой AB две точки C и D также принадлежащие искомому геометрическому месту, так как $AC:CB=a:b$ и $AD:BD=a:b$, причем точки A, B, C, D образуют гармоническую группу точек. Так как $\angle CXD$— прямой, то точка X лежит на окружности, описанной на CD, как на диаметре. Покажем, что каждая точка этой окружности принадлежит искомому геометрическому месту. Возьмем на этой окружности произвольную точку Y и соединим ее с точками A, B, C и D. Пары точек A, B и C, D гармонически сопряжены и, кроме того, угол DYC — прямой, как опирающийся на диаметр, а поэтому

$$\angle AYC=\angle BYC,$$

следовательно,

$$\frac{AY}{BY}=\frac{AC}{CB}=\frac{a}{b}.$$

Задача 4. Построить геометрическое место середин хорд, проходящих через одну точку окружности.

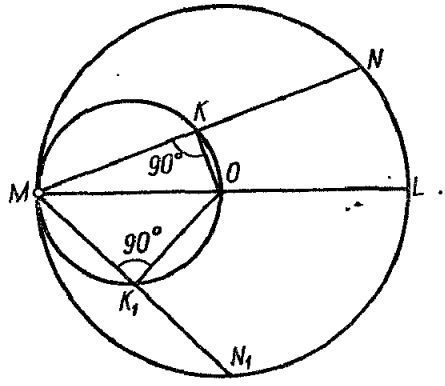


Рис. 165.

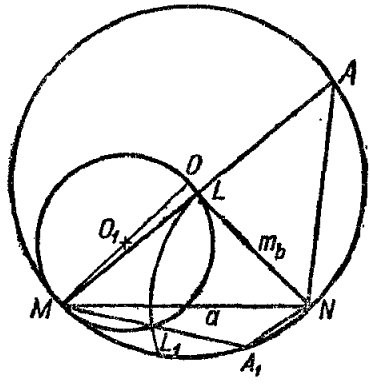


Рис. 166.

Решение. Пусть дана окружность O и на ней точка M (рис. 165). Точка O принадлежит искомому геометрическому месту, так как она является серединой диаметра, а, следовательно, наибольшей хорды, проходящей через точку M.

Проведем произвольную хорду MN и ее середину K соединим с центром O. Угол MKO — прямой по построению. К искомому геометрическому месту точек, следовательно, принадлежат вершины прямых углов всех прямоугольных треугольников, построенных на

отрезке MO, как на гипотенузе. Таким образом, искомое геометрическое место точек представляет собой окружность, построенную на отрезке MO, как на диаметре.

Задача 5. В данную окружность O вписать треугольник, имеющий данное основание a и медиану m_b (рис. 166).

Решение. Из произвольной точки M окружности, как из центра, радиусом $r = a$ проведем дугу до ее пересечения с окружностью O в точке N. Хорда $MN = a$, таким образом, построена.

На отрезке MO, как на диаметре, построим окружность O_1. Из точки N, как из центра, радиусом $R = m_b$ проведем дугу до ее пересечения с окружностью O_1 в точке L. Соединим точки M и L и отрезок ML продолжим до пересечения с окружностью O в

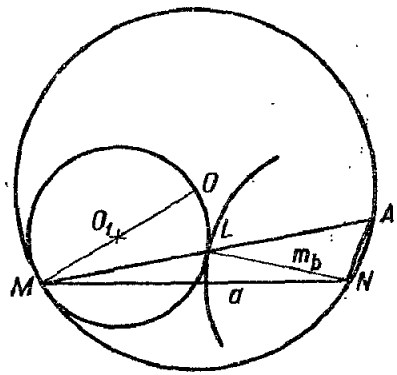


Рис. 167.

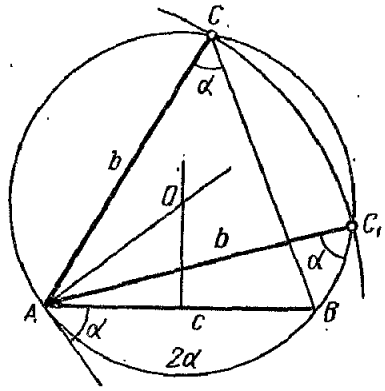


Рис. 168.

точке A. Треугольник MNA — искомый. Задача может иметь два решения: $\triangle MNA$ и $\triangle MNA_1$ (рис. 166), одно решение (рис. 167) и ни одного.

Задача 6. Построить треугольник по основанию c, боковой стороне b и углу при вершине α.

Решение. Строим геометрическое место точек, из которых данный отрезок $AB = c$ виден под данным углом (см. задачу 44 § 28). Из двух дуг с хордой $AB = c$, вмещающих данный угол α, рассмотрим лишь одну.

Вторым геометрическим местом точек будет окружность с центром в точке A и радиусом $R = b$.

Оба геометрических места могут иметь две общие точки, только одну и ни одной. Соответственно этому задача может иметь два решения (рис. 168), одно (рис. 169), или ни одного (рис. 170).

Задача 7. Доказать, что геометрическое место центров окружностей, касающихся прямой в одной и той же точке, есть прямая. Выполнить рисунок.

Доказательство. Пусть окружности с центрами O_1, O_2, O_3, ... касаются прямой AB в точке K. Проведем в каждой окружности радиус из центра O_1, O_2, O_3 ... в точку касания K, тогда каждый из этих радиусов перпендикулярен касательной AB. Следовательно, все центры O_1, O_2, O_3, ... лежат на одной прямой, так как в противном случае из одной точки K прямой AB к этой прямой было бы восстановлено больше одного перпендикуляра. Обратно:

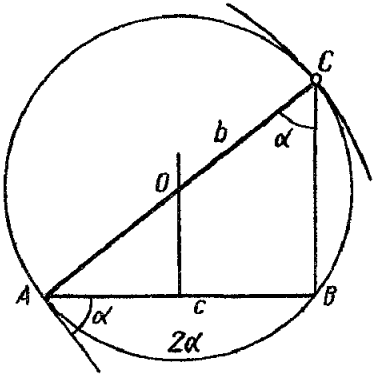


Рис. 169.

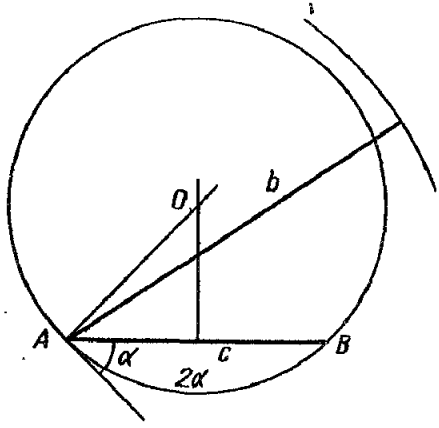


Рис. 170.

проведя из точки O_n, лежащей на прямой KO_1, как из центра, радиусом, равным KO_n, окружность, найдем, что эта окружность касается прямой AB в точке K.

Упражнения.

1. Найти геометрическое место точек, расстояния которых от одной из двух параллельных прямых в три раза больше, чем от другой.

2. Найти геометрическое место точек, являющихся вершинами треугольников с данным основанием и с данной медианой, проведенной к этому основанию.

3. Найти геометрическое место середин отрезков прямых, параллельных одной из диагоналей параллелограмма и расположенных внутри него.

4. Построить квадрат, стороны которого проходят через четыре данные точки. Всегда ли эта задача будет иметь решение?

§ 30. Метод подобия

Во многих задачах на построение удается разделить условие задачи на две такие части, что одна из них вполне определяет форму фигуры, которую требуется построить, а другая часть определяет размер этой фигуры. Сущность метода подобия заключается в том, что, используя те элементы условия задачи, которые определяют форму искомой фигуры, можно сначала построить фигуру, подобную искомой. Затем, используя элементы, определяющие размер, при помощи подобного преобразования выполняется построение искомой фигуры.

Этот метод удобен, когда только одна из данных в задаче величин есть длина, а остальные величины — углы или отношения каких-либо линейных элементов.

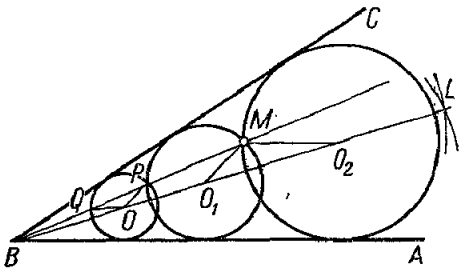


Рис. 171.

Задача 1. В данный угол ABC вписать окружность, которая проходила бы через данную внутри этого угла точку M.

Решение. Проведем биссектрису BL угла ABC и прямую BM. Центр искомой окружности должен лежать на BL, однако его положение на BL нам неизвестно.

Построим вспомогательную окружность, вписанную в $\angle ABC$. Ее центр O также должен лежать на биссектрисе BL (рис. 171). При пересечении окружности O с прямой BM получим две точки P и Q. Соединим точки P и Q с центром O и проведем через точку M прямые $MO_1 \parallel PO$ и $MO_2 \parallel QO$. Точки O_1 и O_2 будут центрами двух окружностей, которые можно вписать в $\angle ABC$ так, чтобы они проходили через точку M. Таким образом, задача имеет два решения. Центром подобия здесь является точка B.

Задача 2. Построить треугольник по отношению его сторон $a:b$, высоте h_c и углу C.

Решение. Возьмем два произвольных отрезка m и n так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}.$$

По отрезкам m, n и углу между ними C построим треугольник A_1B_1C, подобный искомому треугольнику ABC. Этим самым установлена форма искомого треугольника. Далее выполним подобное преобразование $\triangle A_1B_1C$ так, чтобы высота искомого $\triangle ABC$ была равна данной высоте h_c. Для этого на высоте CD_1 треугольника

A_1B_1C (или на продолжении высоты CD_1) отложим отрезок $CD = h_c$ и через точку D проведем прямую $AB \parallel A_1B_1$ (рис. 172). Треугольник ABC — искомый.

Задача 3. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на боковых сторонах треугольника, а две другие вершины — на основании треугольника.

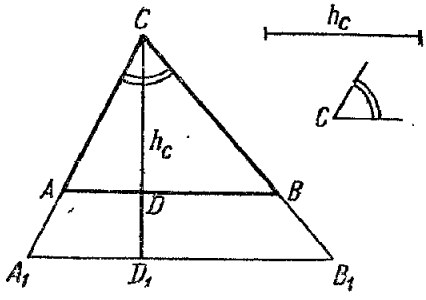


Рис. 172.

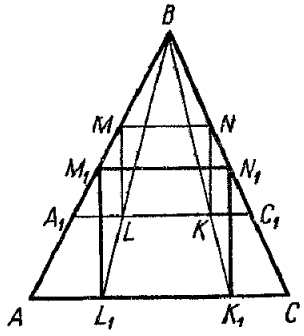


Рис. 173.

Решение. В данном $\triangle ABC$ проведем $MN \parallel AC$ и на отрезке MN построим квадрат $KLMN$ (рис. 173). Продолжив в обе стороны отрезок KL, получим на сторонах треугольника точки A_1, C_1.

$\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$. Выполним подобное преобразование квадрата $KLMN$, принимая в качестве центра подобия точку B. Продолжив лучи BL и BK до пересечения их с основанием AC, получим точки L_1 и K_1. Восстановив из этих точек перпендикуляры к основанию AC, получаем точки M_1, N_1. Таким образом, квадрат $K_1L_1M_1N_1$ является вписанным в $\triangle ABC$ согласно условию задачи.

Задача 4. Вписать в данный сегмент квадрат так, чтобы его сторона лежала на хорде, а две вершины на дуге сегмента.

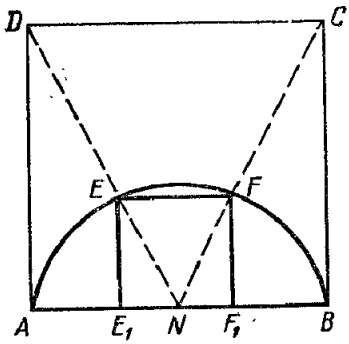


Рис. 174.

Решение. Построение удобно выполнить следующим образом. В концах хорды AB восстановим к ней перпендикуляры $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, $AD = BC = AB$ (рис. 174). Выполним подобное преобразование квадрата $ABCD$, взяв в качестве центра подобия середину N хорды AB.

На пересечении отрезков DN и CN с дугой данного сегмента получим соответственно точки E и F. Опустив из этих точек перпендикуляры на AB, получаем точки E_1 и F_1. Квадрат EE_1F_1F — искомый.

Упражнения.

1. Построить ромб, если дана его сторона и отношение диагоналей.

2. Построить параллелограмм, если дано отношение его смежных сторон, угол и одна из диагоналей.

3. Построить равнобедренную трапецию, если дано отношение оснований, одна диагональ и угол.

4. В данный ромб вписать квадрат, вершины которого лежали бы на сторонах ромба.

5. В данный круг вписать прямоугольник с данным углом между диагоналями.

§ 31. Метод симметрии

Этот метод решения задач на построение основывается на свойствах осевой и центральной симметрии фигур либо их частей.

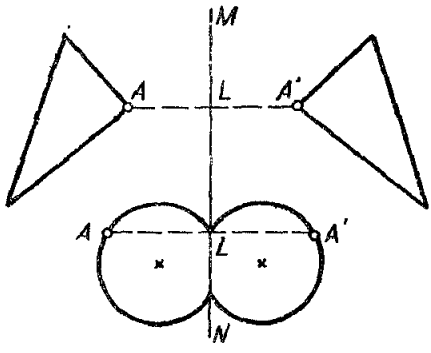


Рис. 175.

1. Симметрия относительно прямой (оси). *Две точки* A и A', расположенные по разные стороны от прямой MN на одном и том же перпендикуляре к ней и на одинаковом расстоянии от основания L перпендикуляра, называются *симметричными* относительно прямой (оси) MN.

Две фигуры называются *симметричными* относительно прямой MN, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей относительно оси MN точка другой фигуры. Аналогично определяется осевая симметрия двух частей одной и той же фигуры (рис. 175).

Любые две фигуры, симметричные относительно какой-нибудь оси, равны. Однако для совмещения двух фигур, симметричных относительно оси, в общем случае требуется переворот (вынос из плоскости) одной из них.

2. Симметрия относительно точки (центра). *Две точки* A и A', расположенные на одной прямой с точкой O по разные стороны от нее и на одинаковом от нее расстоянии, называются *симметричными* относительно точки O (рис. 176). Точку O называют также *центром симметрии*.

Если для двух точек A и B какой-нибудь прямой AB построить симметричные им относительно некоторой точки O точки A' и B', то

$$A'B' \parallel AB,\ A'B' = AB$$

и каждой точке D прямой AB соответствует симметричная ей относительно того же центра O точка D' на прямой $A'B'$ (рис. 176).

Две фигуры называются симметричными относительно точки O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей относительно центра симметрии O точка другой фигуры. Такая симметрия двух фигур называется *центральной симметрией*.

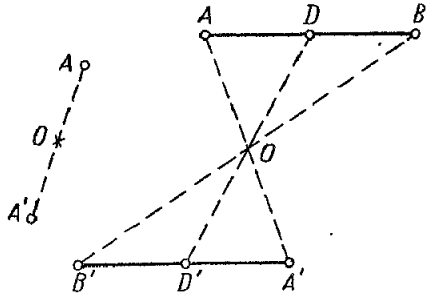


Рис. 176.

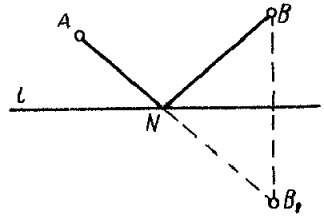


Рис. 177.

Если каждой точке некоторой фигуры соответствует симметричная ей точка этой же фигуры, то говорят, что данная фигура имеет центр симметрии.

Каждую фигуру можно совместить с фигурой ей центрально-симметричной путем ее поворота вокруг центра симметрии на 180°. Центрально-симметричные фигуры можно совместить друг с другом без переворота, т. е. без выноса из плоскости.

Сущность *метода симметрии* решения задач на построение заключается в том, что для данной фигуры (или ее части) выполняют симметричное относительно некоторой оси или точки построение. Это часто дает возможность заметить такие зависимости между элементами фигур (или их частей) данной и симметричной, которые до такого симметричного построения заметить было трудно. Решение задачи при этом существенно облегчается. Успех зависит от удачного выбора осей и центров симметрии и от характера самой задачи.

Задача 1. Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее.

Найти на прямой l точку N такую, чтобы сумма $AN + BN$ была наименьшей.

Решение. Построим точку B_1, симметричную с точкой B относительно прямой l.

Пусть N — искомая точка (рис. 177). Тогда

$$BN = B_1N \text{ и } AN + NB = AN + NB_1.$$

Сумма $AN + NB_1$ будет наименьшей, если отрезки AN и NB_1 составляют прямую линию. Следовательно, построив точку B_1 и соединив ее с заданной точкой A, получим искомую точку N, как точку пересечения прямых l и AB_1.

Задача 2. Даны две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и не пересекающая их прямая AB. Найти на прямой AB такую точку N, чтобы касательные из нее к данным окружностям были наклонены к прямой AB под равными углами (рис. 178).

Решение. Строим окружность O_1', симметричную окружности O_1 относительно прямой AB. Проводим общую касательную к окружностям O_1' и O_2. Она пересечет прямую AB в искомой точке N. Задача имеет четыре решения соответственно четырем общим касательным (внешним и внутренним) к окружностям O_1' и O_2 (см. рис. 131 и 133).

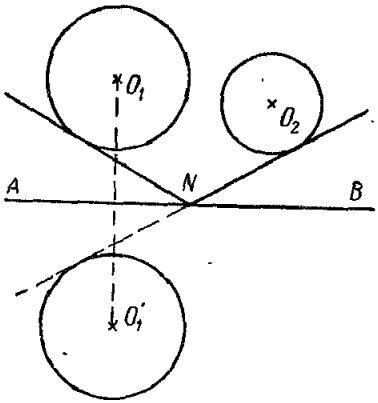


Рис. 178.

Задача 3. В данный угол вписать треугольник наименьшего периметра так, чтобы одна его вершина находилась в точке, данной внутри угла, а две другие на сторонах угла. Выполнить построение.

Решение. Пусть дан угол MON и внутри него точка A. Построим точку A_1, симметричную с данной точкой A относительно прямой OM, и точку A_2, симметричную с точкой A относительно прямой ON. Точки B и C пересечения прямой A_1A_2 с прямыми OM и ON будут вершинами искомого треугольника.

Задача 4. Пусть MN и PQ — перпендикулярные прямые, O — точка их пересечения. Точки A' и A симметричны относительно MN, а точки A'' и A — относительно PQ. Доказать, что точки A' и A'' симметричны относительно точки O. Выполнить построение.

Решение. Нужно доказать, что линия $A'OA''$ прямая и $A'O = OA''$. Из равенства прямоугольных треугольников AOK и $A'OK$, AOL и $A''OL$ следует, что $\triangle AOA'$ и $\triangle AOA''$ равнобедренные, а потому $\angle AOK = \angle A'OK$, $\angle AOL = \angle A''OL$; но $\angle AOL + \angle AOK = 90°$; значит, $\angle A''OA + \angle AOA' = 90° + 90° = 180°$, т. е. точки A', O и A'' лежат на одной прямой, при этом $A''O = OA = OA'$, как стороны равнобедренных треугольников с общей боковой стороной OA. Следовательно, точки A' и A'' симметричны относительно центра O.

Задача 5. Построить четырехугольник по четырем сторонам, если известно, что его диагональ делит один из углов пополам.

Решение. Пусть диагональ BD четырехугольника $ABCD$ делит угол D пополам (рис. 179). Пусть для конкретности $AD > CD$. Выберем в качестве оси симметрии диагональ BD и, перегнув рисунок по этой оси, на AD получим точку E, симметричную с точкой C относительно BD. Соединим точки B и E. Тогда $BE = BC$, $DE = DC$ и $AE = AD - CD$; следовательно $\triangle ABE$ можно построить по трем сторонам. Далее на продолжении AE от точки A откладываем данную сторону AD. Используя данные стороны BC и DC, получаем четвертую вершину C искомого четырехугольника, для чего из точек B и D, как из центров, радиусами BC и DC проводим дуги, пересечение которых и даст точку C.

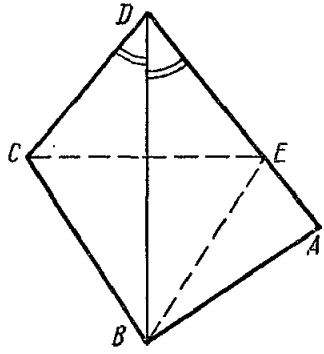


Рис. 179.

Упражнения.

1. Построить треугольник по двум сторонам AC и BC и разности углов, лежащих против этих сторон.

Указание. Выбрать в качестве оси симметрии высоту треугольника, опущенную из вершины C, и построить прямую $A'C$, симметричную стороне AC относительно выбранной оси симметрии.

2. Дан угол ABC и вне его две точки M и N. Построить на стороне AB точку P так, чтобы треугольник, получаемый при пересечении прямых PM, PN и BC был равнобедренным.

Указание. Построить точку M_1, симметричную точке M, выбрав в качестве оси симметрии сторону AB. Далее следует определить величину угла M_1PN.

§ 32. Метод параллельного переноса

Этот метод оказывается наиболее полезным тогда, когда непосредственное построение искомой фигуры затруднительно в связи с разобщенностью ее элементов. Разобщенность элементов искомой фигуры может выразиться не только в смысле отдаленности их друг от друга, но и в смысле отсутствия удобной для решения задачи компоновки этих элементов (включение в треугольник, какой-либо другой фигуры и т. п.).

В этих случаях элементы фигуры переносят параллельно самим себе на такое расстояние, чтобы полученная после переноса фигура могла быть построена более просто, чем искомая. При этом следует стремиться к тому, чтобы вновь полученная фигура включила как можно больше исходных данных.

После построения вспомогательной фигуры и обратного переноса получаем искомую фигуру с помощью ряда простейших построений или же непосредственно.

Задача 1. Построить трапецию по ее основаниям a, b и диагоналям d_1 и d_2.

Решение. В трапеции $ABCD$ (рис. 180) диагонали для построения непосредственно использовать не удается. Однако, совершив параллельный перенос диагонали $DB = d_2$ на величину b, замечаем, что $\triangle ACE$ легко может быть построен по трем сторонам $a + b$, d_1 и d_2. Получив точку C, остальные построения выполняем весьма просто. Проведем $CD \parallel AB$ и на прямой DC радиусом, равным d_2, из точки B, как из центра, делаем засечку D, совершив тем самым обратный параллельный перенос диагонали d_2. Точки A, B, C и D соединяем. Фигура $ABCD$ — искомая трапеция.

Задача 2. Построить четырехугольник по двум противоположным сторонам и трем углам.

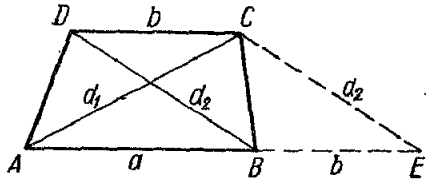


Рис. 180.

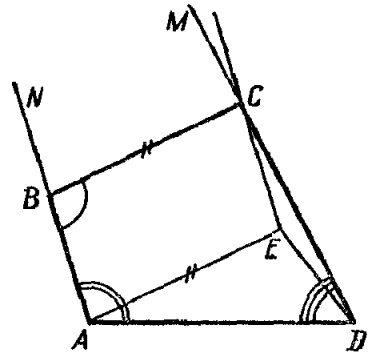


Рис. 181.

Решение. Предположим, что четырехугольник $ABCD$ искомый (рис. 181). Перенесем сторону BC параллельно самой себе так, чтобы она проходила через вершину A. По построению $AE = BC$. Соединив точку E с точкой D, получим $\triangle AED$, в котором известны две стороны AE и AD и угол EAD:

$$\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE,$$

где

$$\angle BAE = \angle NBC = 180^\circ - \angle ABC.$$

Построив $\triangle AED$, проведем $EC \parallel AN$ и луч из точки D под заданным углом ADM. На пересечении этих прямых и получим точку C. Далее проведем $CB \parallel AE$. Полученную точку B соединяем с точкой A. Фигура $ABCD$ — искомый четырехугольник.

Упражнения.

1. Построить четырехугольник по трем его сторонам и углам, прилежащим к четвертой стороне.

2. Построить прямоугольник с данной стороной так, чтобы стороны его проходили через четыре данные точки.

3. Построить треугольник по медианам двух его сторон и высоте, опущенной на третью сторону.

§ 33. Метод инверсии

Точки A и A_1 называются *взаимно инверсными* или симметричными относительно окружности с центром в точке O и радиусом R, если они лежат на одном луче, исходящем из центра окружности O, и если расстояния OA и OA_1 связаны соотношением (рис. 182):

$$OA \cdot OA_1 = R^2.$$

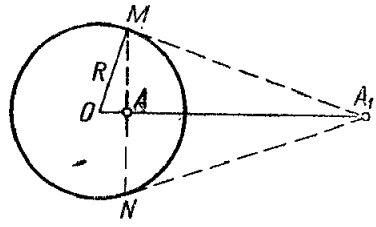


Рис. 182.

Точку A_1 называют также *обратным* или *инверсным* изображением точки A, а само преобразование называют *преобразованием инверсии*. При этом если точка A лежит внутри окружности O, то ее инверсное изображение A_1 обязательно будет лежать вне окружности O, и наоборот.

Данную окружность O называют *окружностью инверсии*, а ее центр — *полюсом* или *центром инверсии*. Величина R^2 называется *степенью инверсии*. Термин «инверсия» происходит от латинского слова *inversio* — переворачивание, перестановка.

Преобразование инверсии легко осуществить графически. Для этого из данной точки A восстанавливаем перпендикуляр к лучу OA и через точку M (или N) его пересечения с окружностью O проводим касательную, которая и отсечет на продолжении луча OA точку A_1, симметричную относительно окружности O (рис. 182).

Действительно, из подобия треугольников OMA и OMA_1 (у которых $\angle OAM = \angle OMA_1 = 90°$ и $\angle MOA = \angle MOA_1$) получаем

$$\frac{R}{OA} = \frac{OA_1}{R} \text{ или } OA \cdot OA_1 = R^2,$$

как и должно быть для взаимно инверсных точек.

Если данная точка A_1 лежит вне окружности O, то проводим из нее касательную A_1M, а затем, опустив перпендикуляр MA на OA_1, получаем ее изображение A. Точке, лежащей на окружности инверсии, соответствует сама эта точка.

Если точка A приближается к центру инверсии, то ее изображение A_1 удаляется бесконечно далеко. Если точка A приближается

к окружности инверсии, то ее инверсное изображение A_1 извне приближается к той же точке на окружности.

Совокупность обратных изображений всех точек некоторой фигуры образует фигуру, инверсно соответствующую данной. В частности, окружности инверсии соответствует сама эта окружность, а прямой, проходящей через центр инверсии, соответствует сама эта прямая. В этом случае каждому радиусу, т. е. отрезку, соединяющему центр с какой-либо точкой окружности, будет соответствовать луч, уходящий в бесконечность и являющийся продолжением этого радиуса.

Часть плоскости, заключенная внутри окружности инверсии, соответствует внешней части плоскости, и наоборот. Прямой линии, которая не проходит через центр инверсии, соответствует окружность, проходящая через центр инверсии. Окружность, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в другую окружность, также не проходящую через центр инверсии.

Если две линии пересекаются или касаются, то и образы (изображения) этих линий, полученные при помощи инверсии, пересекаются или касаются в соответственной точке.

Угол пересечения двух линий равен углу пересечения образов этих линий, но противоположен ему по знаку.

Преобразование инверсии часто называют также преобразованием посредством обратных радиусов или, короче, *преобразованием обратными радиусами.*

Метод инверсии решения задач на построение основывается на том, что при инверсии относительно окружности (как и при симметрии относительно прямой, которая является частным случаем инверсии) фигура, обратная данной, сохраняет в известной степени сходство с данной фигурой; в частности, все углы сохраняют свою величину. В задачах на построение некоторые элементы и связи между ними в искомой фигуре неизвестны. Их следует определить, отыскав путь к решению, что не всегда бывает легко. При инверсии данные и искомые элементы отобразятся, и часто зависимость между ними подмечается проще в отображенной фигуре, чем в исходной. Построив отображенную фигуру, инвертируют ее обратно с тем же центром и степенью инверсии и получают искомую фигуру. Большую роль здесь играет удачный выбор центра и степени инверсии.

З а д а ч а. Построить окружность O_1, касающуюся данной окружности O и проходящую через две заданные точки A и B, расположенные вне окружности O.

Р е ш е н и е. Предположим, что задача решена. Примем точку A за центр инверсии, а квадрат касательной, проведенной из точки A к окружности O, за степень инверсии (рис. 183):

$$AT^2 = R^2 \text{ или } AT = R.$$

Искомая окружность O_1 будет отображенной фигурой к касательной B_1N_1, проведенной к заданной окружности O из точки B_1, где точка B_1 инверсна к заданной точке B. Чтобы ее определить, проводим через заданные точки A и B луч, а затем из центра A радиусом $R = AT$ — окружность инверсии и строим точку B_1, симметричную относительно этой окружности, как было показано на рис. 182. Проведя теперь через точку B_1 касательную B_1N_1 и соединив найденную точку N_1 отрезком прямой с заданной точкой A, имеем

$$AN \cdot AN_1 = AT^2 = R^2,$$

так как произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной. Следовательно, точки N и N_1 также взаимно симметричны относительно той же самой окружности инверсии A.

Если мы теперь, двигаясь по прямой N_1B_1, будем удаляться в бесконечность, то *образом (изображением)* бесконечно удаленной точки будет центр инверсии, т. е. точка A. В таком случае, образом всей прямой N_1B_1 будет являться окружность O_1, проходящая через точки A, B, N, которую легко построить (см. § 28, задача 14). Эта окружность и будет искомой, так как углы при инверсии сохраняются, а прямая N_1B_1 касается заданной окружности O; значит, и ее образ — окружность ANB будет касаться заданной окружности O в точке N, инверсной к точке N_1.

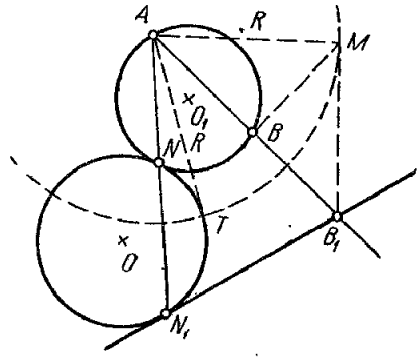


Рис. 183.

В заключение отметим, что преобразование инверсии применяют не только в геометрии, но и в картографии, теории функций комплексного переменного, физике и технике. Например, выдающийся русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894), создавший несколько новых направлений в высшей математике, основоположник теории механизмов в России, пользуясь инверсией, сконструировал ряд оригинальных механизмов для преобразования криволинейного движения в прямолинейное.

Упражнения.

1. Дана окружность O. Построить окружности, пересекающие данную окружность под прямыми углами.

Указание. Окружность пересекается под прямыми углами окружностью, проходящей через две инверсные относительно данной

окружности точки. Радиус секущей окружности равен длине касательной, проведенной из ее центра к окружности O.

2. Дана окружность инверсии радиуса R. Определить фигуру, инверсную (отображенную) окружности радиуса R_1, концентрической с окружностью инверсии. Рассмотреть случаи $R > R_1$, $R < R_1$, $R = R_1$.

3. Построить графически еще несколько образов (изображений) точек, произвольно взятых на прямой N_1B_1, симметричных относительно окружности инверсии A и проверить, все ли эти точки будут находиться на окружности O_1 (рис. 183).

Примечание. С помощью метода инверсии, в частности, может быть решена известная задача древности — задача Аполлония: построить окружность, касательную к трем данным окружностям произвольных радиусов.

§ 34. Построение фигур, равновеликих данным

При решении планиметрических задач на вычисление, построения и доказательства часто оказывается полезным предварительное построение фигуры, равновеликой данной, т. е. фигуры, площадь которой равна площади данной фигуры. Рассмотрим некоторые примеры построения равновеликих фигур:

1. Построить равнобедренный треугольник, равновеликий данному произвольному треугольнику. Выполнить рисунок.

Решение. Через вершину данного треугольника проводим прямую, параллельную его основанию. Точку, полученную при пересечении этой прямой с перпендикуляром, восстановленным к середине основания, соединяем с концами основания. Полученный треугольник равнобедренный. Его основание и высота соответственно равны основанию и высоте данного треугольника; следовательно, их площади равны.

2. Построить прямоугольный треугольник, равновеликий произвольно заданному.

Решение. Вершину искомого треугольника найдем как точку пересечения прямой, параллельной основанию и проходящей через вершину данного треугольника с перпендикуляром, восстановленным в конце его основания.

3. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

Решение. Пусть основание и высота данного треугольника равны соответственно a и h.

Обозначим сторону искомого квадрата через x. Из условия равенства площадей треугольника и квадрата имеем

$$x^2 = \frac{1}{2} ah,$$

следовательно, сторона квадрата есть средний пропорциональный отрезок между отрезками $\frac{a}{2}$ и h (см. § 35). Задача имеет единственное решение.

4. Построить квадрат, равновеликий данной трапеции.

Решение. Пусть основания трапеции и ее высота соответственно равны a, b, h. Обозначим через x сторону искомого квадрата. Следовательно, по условию равенства площадей, имеем:

$$x^2 = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Таким образом, отрезок x и в данном случае строится как средняя пропорциональная величина между отрезками $\frac{a+b}{2}$ (средняя линия трапеции) и h. Задача имеет единственное решение.

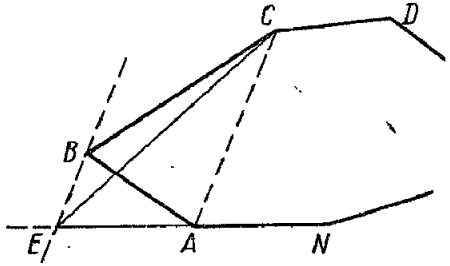


Рис. 184.

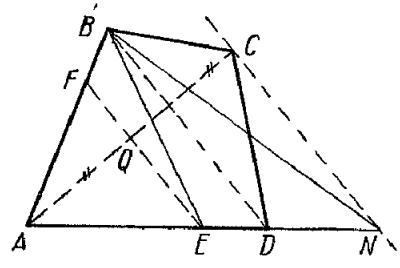


Рис. 185.

5. Построить $(n-1)$-угольник, равновеликий данному n-угольнику.

Решение. Пусть точки A, B, C, D, ..., N являются вершинами данного n-угольника. Проведем диагональ AC (можно провести любую другую, стягивающую две смежные стороны), а через вершину B проведем прямую $BE \parallel AC$ (рис. 184). Точку E пересечений этой прямой с продолжением стороны AN соединим с вершиной C. Фигура ECD ... N является уже $(n-1)$-угольником, так как число вершин данного n-угольника уменьшено на единицу. Так как треугольники ABC и AEC равновелики (докажите это), то и построенный $(n-1)$-угольник будет равновелик исходному n-угольнику. Задача имеет бесконечное множество решений.

6. Построить треугольник, равновеликий данному n-угольнику.

Указание. Для выполнения построения следует операцию, описанную в предыдущей задаче, выполнить $n-3$ раза, уменьшая при этом каждый раз число углов данного многоугольника на единицу. После выполнения всех операций число углов данного многоугольника окажется равным $n-(n-3)=3$. Использование построения

треугольника, равновеликого данному четырехугольнику, может быть продемонстрировано на следующей задаче.

Задача. Если в произвольном четырехугольнике $ABCD$ через середину Q диагонали AC провести прямую $EF \parallel BD$, то прямая BE разделит площадь данного четырехугольника пополам. Доказать.

Доказательство. Через вершину четырехугольника C проведем прямую CN, параллельную его диагонали BD. Тогда (согласно примеру 5) треугольник ABN равновелик исходному четырехугольнику $ABCD$ (рис. 185). В таком случае, требуется доказать, что

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABN}.$$

Так как по условию $AQ = QC$ и $QE \parallel CN$, то QE есть средняя линия $\triangle ACN$; следовательно, $AE = EN$.

Таким образом, BE есть медиана $\triangle ABN$ и, значит,

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABN} = \frac{1}{2} S_{ABCD},$$

что и требовалось доказать.

§ 35. Алгебраический метод решения геометрических задач на построение

Применение алгебраического метода к решению геометрических задач на построение сводится к следующему:

1) составлению уравнения по условиям задачи;

2) решению полученного уравнения относительно буквы, означающей искомый отрезок;

3) исследованию полученной формулы;

4) построению отрезка по составленной формуле.

В данном параграфе мы остановимся только на четвертом пункте, так как применение всех предыдущих не вызывает затруднений.

Построение отрезков по заданным формулам. Пусть через a, b, c, d ... обозначены заданные отрезки, а через x, y, z, t ... — искомые.

а) Построение отрезков по формулам, представляющим собой сумму, разность, а также умножение либо деление на число, не представляет труда и сводится к сложению отрезков, их вычитанию, увеличению отрезка в заданное число раз и делению отрезка на заданное число равных частей (см. § 28).

б) Построение отрезков по формулам $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x = \sqrt{c^2 - b^2}$ сводится к построению прямоугольного треугольника по его катетам,

либо гипотенузе и катету. В первом случае x — гипотенуза, во втором — x — катет.

в) Построение отрезков по формулам

$$x = \frac{ab}{c}; \quad x = \frac{a^2}{c}$$

сводится к отысканию четвертого пропорционального отрезка (используется теорема о пересечении угла параллельными прямыми).

г) Построение отрезков по формулам

$$x = \frac{a^2}{c}; \quad x^2 = ab \text{ или } x = \sqrt{ab}$$

удобно выполнять, используя теорему о перпендикуляре, опущенном из произвольной точки окружности на диаметр.

д) Построение отрезков по формулам, представляющим комбинации приведенных выше формул, выполняется путем введения вспомогательных неизвестных отрезков и последовательного их отыскания.

Примеры.

1. $x = \dfrac{(a+b)(b-c)}{a+c}$.

Здесь необходимо последовательно построить четыре отрезка $y=a+b$, $z = b - c$, $t = a + c$, $x = \dfrac{yz}{t}$.

2. $x = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a + c}$.

Здесь, преобразовав заданную формулу к виду $x = \dfrac{(a+b)^2}{a+c}$, следует построить три отрезка $y = a + b$, $z = a + c$, $x = \dfrac{y^2}{z}$. Без преобразования после почленного деления пришлось бы выполнить пять операций.

3. $x = \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{cd}$.

Здесь следует положить $y = \dfrac{ab}{c}$, $z = \sqrt{a^2+b^2}$; тогда получим

$$x = \frac{yz}{d}.$$

4. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}$.

Здесь следует построить такие два вспомогательных отрезка:

$$y = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad z = \sqrt{c^2 - d^2};$$

тогда $x = \sqrt{y^2 + z^2}$. В этом примере, как и во многих других, вводя новые отрезки, можно подбирать разные комбинации заданных отрезков. Наилучшим решением будет такое, которое требует минимального количества выполняемых операций.

5. $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Здесь следует предварительно выполнить преобразования

$$x = \sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}} = \sqrt{\sqrt{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}}.$$

Следовательно, требуется положить

$$y = \frac{b^2}{a}, \quad z = \sqrt{a^2 + y^2},$$

тогда

$$x = \sqrt{az}.$$

6. В треугольник ABC вписать квадрат $MQPN$ так, чтобы две его вершины Q и P лежали на основании BC, а две другие вершины — на боковых сторонах.

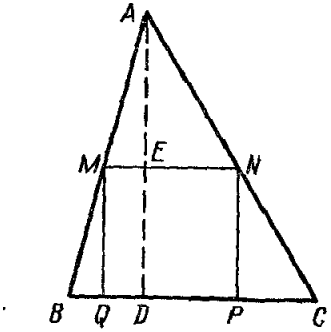


Рис. 186.

Решение. Обозначим $BC = a$, $AD = h$, $MN = MQ = x$ (рис. 186). Из подобия треугольников ABC и AMN (у которых по условию $MN \parallel BC$) находим

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{h - x},$$

откуда

$$x = \frac{ah}{a + h}.$$

Построив сторону x квадрата $MQPN$ как четвертое пропорциональное отрезков a, h и $a + h$ (см. § 6, рис. 7), проведем на расстоянии x от основания BC прямую $MN \parallel BC$. Получив точки M и N, опустим $MQ \perp BC$ и $NP \perp BC$. Искомый квадрат построен.

7. Площадь данного круга разделить в среднем и крайнем отношении концентрической окружностью. Обозначим радиус данного

круга через r, а искомой окружности через x. Данный круг разделится на две части: кольцо, площадь которого $\pi(r^2 - x^2)$, и круг, площадь которого πx^2. Если площадь кольца больше площади внутреннего круга, то используя условие задачи, получим

$$\frac{\pi r^2}{\pi(r^2 - x^2)} = \frac{\pi(r^2 - x^2)}{\pi x^2},$$

откуда

$$x^4 - 3r^2x^2 + r^4 = 0.$$

Отбрасывая отрицательные корни, получаем

$$x_1 = r\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}; \quad x_2 = r\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

Корень x_2 также не удовлетворяет условию задачи, так как $x_2 > r$. Следовательно, для построения радиуса делящей окружности необходимо воспользоваться формулой

$$x = r\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

или, после преобразования с помощью формулы сложного радикала,

$$x = \frac{r\sqrt{5} - r}{2}.$$

(О построении отрезка $r\sqrt{5}$ см. § 3, рис. 2).

Если же площадь кольца меньше площади внутреннего круга, то получим уравнение

$$\frac{\pi r^2}{\pi x^2} = \frac{\pi x^2}{\pi(r^2 - x^2)}, \quad \text{т. е.} \quad x^4 + r^2x^2 - r^4 = 0.$$

Отбрасывая мнимые корни, находим:

$$x = \sqrt{r \cdot \frac{r\sqrt{5} - r}{2}}.$$

Таким образом, радиус x делящей окружности есть среднее геометрическое двух отрезков r и $\frac{r\sqrt{5} - r}{2}$, где r — отрезок заданный.

§ 36. Построение корней квадратного уравнения

Если при построении отрезка x приходится использовать квадратное уравнение, то следует поступать так. Учитывая, что квадратное уравнение, в зависимости от знака свободного члена, имеет один из двух видов:

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + px - q = 0,$$

положим $q = m^2$ (это всегда возможно, так как $q > 0$). Тогда квадратные уравнения приводятся к виду

$$x^2 + px + m^2 = 0 \text{ или } x^2 + px - m^2 = 0.$$

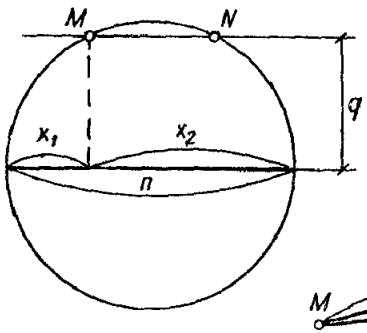


Рис. 187.

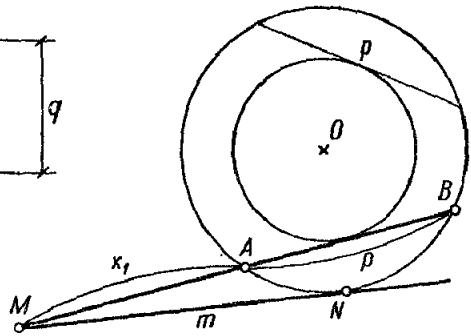


Рис. 188.

Рассмотрим первое из этих уравнений.

а) В случае $p < 0$ заменим $p = -n$ и получим уравнение $x^2 - nx + m^2 = 0$, где $n > 0$. При этом для корней x_1 и x_2 рассматриваемого квадратного уравнения, согласно формулам Виета, имеем:

$$x_1 + x_2 = n; \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 = q.$$

Построение x_1 и x_2 осуществляется следующим образом. На отрезке длиной n, как на диаметре, описываем окружность (рис. 187) и на расстоянии $q = m^2$ от диаметра n проводим прямую, ему параллельную. Если $n > 2q$, то эта прямая пересечет окружность в двух точках M и N. Опустив из точки M (или N) перпендикуляр на диаметр, разбиваем его на два отрезка x_1 и x_2, которые являются корнями данного уравнения, так как они удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = n = -p$; $x_1 \cdot x_2 = m^2 = q$.

Если $n > 2q$, получаем два разных отрезка x_1 и x_2.

Если $n = 2q$, получаем лишь один отрезок $x_1 = x_2$ (в этом случае проведенная прямая будет только касаться окружности).

Если $n < 2q$, построить отрезок, длина которого является корнем квадратного уравнения, невозможно (в этом случае проведенная прямая не касается окружности). Корни квадратного уравнения в этом случае будут комплексными.

б) В случае $p > 0$ оба корня квадратного уравнения отрицательны.

Если нас интересует абсолютная величина корней x_1 и x_2, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ заменяем уравнением $x^2 - px + q = 0$, корни которого по абсолютной величине равны корням предыдущего квадратного уравнения, но оба положительны. В результате мы снова пришли к построению, описанному выше.

Рассмотрим теперь второе уравнение:

$$x^2 + px - m^2 = 0.$$

В этом уравнении, в зависимости от знака коэффициента p также возможны два случая.

а) В случае $p > 0$ корни уравнения $x^2 + px - m^2 = 0$ имеют разные знаки. Построим положительный корень, для чего следует записать уравнение в виде $x(x + p) = m^2$.

При $p > 0$ величину m можно рассматривать как длину касательной к окружности из некоторой внешней точки, а $(x + p)$ как длину проведенной из той же точки секущей, часть которой, лежащая внутри окружности, равна p.

Построение отрезка x осуществляется следующим образом. Взяв произвольную окружность, диаметр которой больше p, построим хорду p и концентрическую окружность, касающуюся этой хорды (рис. 188).

В произвольной точке N внешней окружности проводим к ней касательную и откладываем на ней от точки касания отрезок $MN = m$. Далее из точки M проводим к внутренней окружности касательную, которая пересечет внешнюю окружность в некоторых точках A и B; при этом $AB = p$, так как отрезки всех касательных, заключенных между двумя концентрическими окружностями, равны между собою. Следовательно, $AM = x_1$, где $x_1 > 0$, поскольку произведение всей секущей $(x_1 + p)$ на ее внешнюю часть x_1 будет равно квадрату касательной m^2.

Абсолютную величину отрицательного корня x_2 получаем на основании равенства $x_1 + x_2 = -p$, откуда $-x_2 = x_1 + p$, а в таком случае

$$|x_2| = BM.$$

б) В случае $p < 0$ произведем замену $-p = n$ $(n > 0)$. Уравнение примет вид $x^2 - nx - m^2 = 0$, т. е.

$$x(x - n) = m^2.$$

Построение отрезков x_1 и x_2 выполняется аналогично, однако теперь положительным корнем является длина отрезка BM, а абсолютной величиной отрицательного корня — длина отрезка AM.

§ 37. Геометрические задачи на неравенства

Задачи на доказательство геометрических неравенств встречаются в планиметрии довольно часто. Их решение вызывает иногда трудности, связанные со спецификой той или иной задачи. Общие идеи, применяемые при решении таких задач, основываются на известных свойствах алгебраических неравенств. Рассмотрим несколько наиболее типичных задач.

Все рисунки, необходимые для более четкого понимания рассматриваемых ниже задач, читатель легко сможет выполнить самостоятельно, поэтому мы их приводить не будем.

Задача 1. Доказать, что в произвольном треугольнике удвоенная сумма медиан, опущенных на боковые стороны, больше утроенного основания.

Доказательство. Рассмотрим $\triangle ABC$, где AB — основание. Проведем медианы к боковым сторонам AC и CB и обозначим буквой O точку пересечения медиан. Тогда

$$AO = \frac{2}{3} m_a; \quad BO = \frac{2}{3} m_b.$$

Из $\triangle AOB$ следует, что

$$AO + BO > AB, \text{ т. е. } \frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b > AB,$$

откуда

$$2(m_a + m_b) > 3AB,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что в неравнобедренном прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, меньше половины гипотенузы.

Доказательство. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC a и b — катеты, c — гипотенуза, h_c, m_c — соответственно высота и медиана, опущенные на гипотенузу. Поскольку $h_c \perp c$ и h_c и m_c проведены из одной точки C, то

$$h_c < m_c,$$

так как m_c — наклонная (по условию задачи $\triangle ABC$ не равнобед-

ренный, а значит, $h_c \neq m_c$). Но $m_c = \frac{1}{2} c$, следовательно,

$$h_c < \frac{1}{2} c.$$

Выполнить все необходимые построения.

Задача 3. Доказать, что средняя линия треугольника меньше полусуммы двух пересекаемых ею сторон, но больше их полуразности.

Решение. Обозначим через DE среднюю линию $\triangle ABC$, пусть при этом точка D лежит на стороне AB.

Для любого треугольника справедливы неравенства (см. § 12):

$$|AB - BC| < AC < AB + BC,$$

следовательно,

$$\left|\frac{AB}{2} - \frac{BC}{2}\right| < \frac{AC}{2} < \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2},$$

но

$$DE = \frac{1}{2} AC, \quad DB = \frac{1}{2} AB, \quad BE = \frac{1}{2} BC.$$

Таким образом,

$$|DB - BE| < DE < DB + BE,$$

что и требовалось доказать.

Задача 4. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике ABC ($AC = b$, $BC = a$, $AB = c$) между гипотенузой c и катетами a, b имеет место неравенство

$$c \geqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Доказательство. Из очевидного неравенства $(a-b)^2 \geqslant 0$ или $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ имеем

$$2(a^2 + b^2) \geqslant 2ab + (a^2 + b^2)$$

или

$$2(a^2 + b^2) \geqslant (a+b)^2.$$

Учитывая, что $a^2 + b^2 = c^2$, получим $2c^2 \geqslant (a+b)^2$, т. е.

$$c \geqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}},$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, что знак равенства имеет место лишь в случае равнобедренного прямоугольного треугольника.

Задача 5. Доказать, что сумма квадратов биссектрис треугольника не больше квадрата его полупериметра.

Доказательство. В формулах

$$\beta_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}; \quad \beta_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

$$\beta_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)},$$

заменим первые сомножители единицами. Тогда, поскольку

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}; \quad a+c \geqslant 2\sqrt{ac}; \quad b+c \geqslant 2\sqrt{bc},$$

получим:

$$\beta_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}; \quad \beta_b \leqslant \sqrt{p(p-b)}; \quad \beta_c \leqslant \sqrt{p(p-c)}.$$

Возводя в квадрат и складывая, находим:

$$\beta_a^2 + \beta_b^2 + \beta_c^2 \leqslant p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = p[3p - (a+b+c)]$$

или, после очевидных упрощений,

$$\beta_a^2 + \beta_b^2 + \beta_c^2 \leqslant p; \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Знак равенства имеет место в случае равностороннего треугольника.

Задача 6. Доказать, что сумма квадратов высот треугольника не больше квадрата его полупериметра.

Доказательство. Поскольку во всяком треугольнике

$$h_a \leqslant \beta_a; \quad h_b \leqslant \beta_b; \quad h_c \leqslant \beta_c,$$

то из неравенства

$$\beta_a^2 + \beta_b^2 + \beta_c^2 \leqslant p^2,$$

после замены биссектрис соответствующими высотами, следует

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leqslant p^2.$$

Знак равенства имеет место в случае равностороннего треугольника.

Задача 7. Доказать, что радиус описанной вокруг треугольника окружности не меньше, чем диаметр окружности, вписанной в этот треугольник.

Доказательство. Пусть R — радиус описанной, а r — радиус вписанной в один и тот же треугольник окружности. Учиты-

вая, что расстояние d между центрами вписанной и описанной окружности, выражаемое формулой

$$d = \sqrt{R^2 - 2Rr},$$

неотрицательно, т. е. $d \geqslant 0$, получаем $R^2 - 2Rr \geqslant 0$. Поскольку $R > 0$, то мы и приходим к требуемому неравенству

$$R \geqslant 2r.$$

Задача 8. Доказать, что биссектриса CE внутреннего угла C треугольника ABC делит противоположную сторону на отрезки AE и BE, из которых каждый меньше прилежащей к нему стороны, т. е. доказать, что

$$AE < AC; \quad BE < BC.$$

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $CE \perp AB$. В этом случае справедливость высказанного утверждения очевидна.

2) Пусть CE — наклонная к основанию AB. Следовательно, один из смежных углов AEC или BEC — тупой, а второй — острый. Предположим, что $\sphericalangle AEC$ тупой. Тогда из $\triangle ACE$ заключаем, что

$$AE < AC,$$

и первая половина данного утверждения доказана.

Так как $\sphericalangle BEC$ является внешним для $\triangle ACE$, то

$$\sphericalangle ACE < \sphericalangle BEC.$$

Но по условию CE есть биссектриса, так что

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle ECB,$$

поэтому для треугольника BCE находим, что

$$\sphericalangle ECB < \sphericalangle BEC$$

и, следовательно,

$$BE < BC,$$

так как во всяком треугольнике против меньшего угла лежит и меньшая сторона. Таким образом, утверждение полностью доказано.

Аналогично проводится доказательство, если предположить, что $\sphericalangle BEC$ тупой.

Задача 9. Доказать, что во всяком треугольнике площадь и полупериметр связаны неравенством

$$p^2 \geqslant 3\sqrt{3}S.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое трех чисел $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$:

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда, учтя что $a+b+c=2p$, получаем

$$p \geqslant 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Возведя обе части этого неравенства в куб и умножая на p, находим

$$p^4 \geqslant 27p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Извлекая теперь из обеих частей квадратный корень и воспользовавшись затем формулой Герона (см. § 17), имеем

$$p^2 \geqslant 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ т. е. } p^2 \geqslant 3\sqrt{3}S,$$

что и требовалось доказать.

На этом мы заканчиваем краткое изложение вопросов планиметрии и переходим к стереометрии.

Основная литература, в которой все эти вопросы рассмотрены более подробно, приведена в конце книги.

II. СТЕРЕОМЕТРИЯ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Стереометрия (от греческих слов στερεός — пространственный, и μετρέω — измеряю) — раздел геометрии, содержащий учение о пространственных телах и фигурах и о взаимном положении линий, плоскостей, поверхностей и тел в пространстве.

Геометрическая фигура называется пространственной, если не все точки ее лежат в одной плоскости. Примером пространственной фигуры может служить геометрическое тело — часть пространства, занимаемая предметом. Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства поверхностью.

Две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить так, чтобы они совпали всеми своими частями.

Предполагается, что при перемещении в пространстве геометрические фигуры не изменяются.

Пространственные фигуры изображаются на чертеже в виде рисунков, которые выполняются по определенным правилам, основанным на геометрических свойствах фигур.

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 38. Основные свойства плоскости

Основными понятиями в стереометрии являются: точка, прямая и плоскость. Вопросы о точках и прямых были уже частично рассмотрены в разделе «Планиметрия». Поэтому перейдем непосредственно к рассмотрению плоскостей.

Основные свойства плоскостей выражаются следующими аксиомами:

1. Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

2. Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

3. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Из этих аксиом вытекают следствия:

1) Через прямую и точку, лежащую вне этой прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

2) Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.

3) Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.

4) Через любую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.

Если множество всех плоскостей рассматривать как вращение одной и той же плоскости относительно некоторой прямой, то можно следствие 4) сформулировать так: плоскость может вращаться вокруг любой прямой, принадлежащей плоскости.

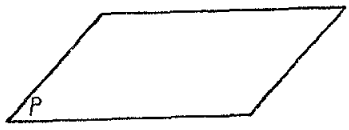


Рис. 189.

Множество плоскостей, проходящих через некоторую прямую, называют *пучком плоскостей*, а прямую, через которую они проходят, называют *осью пучка*.

Плоскость на рисунке изображается в виде параллелограмма и обозначается одной буквой, например, P (рис. 189).

§ 39. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве могут иметь следующее расположение:

а) две прямые лежат в одной плоскости, при этом они могут иметь общую точку, т. е. пересекаться или не иметь общих точек, тогда их называют *параллельными*;

б) две прямые не лежат в одной плоскости и, следовательно, не имеют общих точек, тогда их называют *скрещивающимися*.

Две скрещивающиеся прямые не образуют угол в обычном смысле, так как у них нет общей точки.

Условились считать, что угол между двумя скрещивающимися прямыми равен углу, образованному двумя лучами, выходящими из одной точки и параллельными этим скрещивающимся прямым.

На рис. 190 прямые AB и CD — скрещивающиеся, а лучи $OM \parallel AB$ и $ON \parallel CD$, значит угол между скрещивающимися прямыми считают равным углу MON.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми считают длину заключенного между ними отрезка прямой, перпендикулярной к каждой из параллельных прямых и пересекающей их.

Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной отрезка прямой, перпендикулярной к каждой из скрещивающихся прямых и пересекающей каждую из них в точках, являющихся

концами этого отрезка. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми есть наименьшее расстояние между точками, лежащими, на этих прямых.

На рис. 191 изображены скрещивающиеся прямые: прямая AB, лежащая в плоскости P, и прямая CD, пересекающая эту плоскость. Прямая MN перпендикулярна как к AB, так и к CD; тогда длина отрезка MN есть расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD.

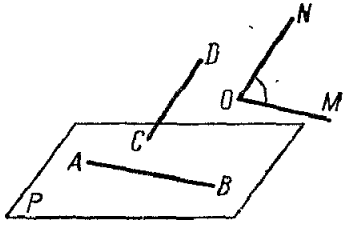


Рис. 190.

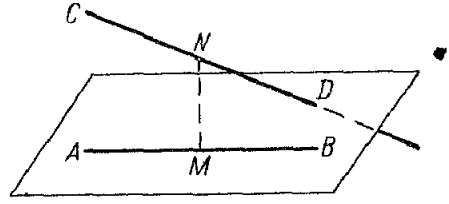


Рис. 191.

§ 40. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая линия и плоскость в пространстве могут быть расположены следующим образом:

а) прямая лежит в плоскости или, что то же самое, плоскость проходит через прямую;

б) прямая и плоскость имеют одну общую точку, т. е. прямая пересекает плоскость. Точку их пересечения называют следом прямой на данной плоскости;

в) прямая не имеет общих точек с плоскостью, т. е. прямая параллельна плоскости.

1. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости. Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная к ней, называется *наклонной* к этой плоскости.

Теорема 1. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в некоторой плоскости, то она перпендикулярна и к любой прямой, лежащей в данной плоскости, т. е. прямая перпендикулярна к плоскости.

Прямоугольной проекцией точки на плоскость называется след перпендикуляра, проведенного через эту точку к данной плоскости.

След перпендикуляра на плоскости называется основанием перпендикуляра, а след наклонной — основанием наклонной.

Прямоугольной проекцией наклонной на плоскость называется отрезок прямой, соединяющей основание наклонной и основание перпендикуляра, опущенного из конца наклонной на эту плоскость.

Теорема 2. Если из одной и той же точки вне плоскости провести к плоскости перпендикуляр и наклонные, то:

а) перпендикуляр короче всякой наклонной;

б) наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой;

в) из двух наклонных, имеющих разные проекции, больше та, проекция которой больше.

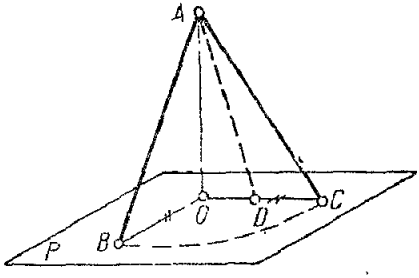


Рис. 192.

На рис. 192 AB, AC и AD наклонные к плоскости P, а AO — перпендикуляр к этой плоскости. Тогда, если проекции $OB = OC$, то и наклонные $AB = AC$, если $OD < OC$, то и соответственно наклонные $AD < AC$.

Теорема 3 (обратная теореме 2). Если из одной и той же точки, лежащей вне плоскости, провести к этой плоскости перпендикуляр и наклонные, то:

а) равные наклонные имеют равные проекции;

б) из двух проекций больше та, которая соответствует большей наклонной.

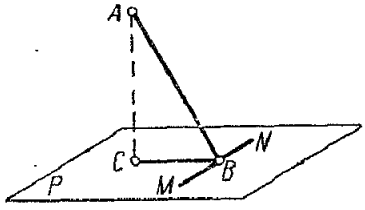


Рис. 193.

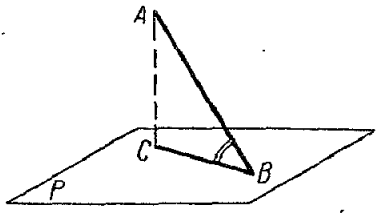


Рис. 194.

Теорема 4 (теорема о трех перпендикулярах). Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно к наклонной, перпендикулярна к проекции этой наклонной на данную плоскость.

Теорема 5 (обратная теореме 4). Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно к проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна к самой наклонной.

На рис. 193 AB — наклонная, а AC — перпендикуляр к плоскости P, если $MN \perp AB$, то и $MN \perp BC$ и, наоборот, если $MN \perp CB$, то и $MN \perp AB$.

2. Угол между прямой и плоскостью. *Углом между прямой и плос-*

костью называется острый угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

На рис. 194 AB — наклонная, а CB ее проекция на плоскость P, тогда угол между AB и плоскостью P равен $\angle ABC$.

Теорема 6. Угол между прямой и плоскостью есть наименьший из всех углов, образованных этой прямой с любой прямой, лежащей в данной плоскости.

Рассмотрим несколько задач на взаимное расположение прямой и плоскости.

Задача 1. Из точки M, отстоящей от плоскости P на расстоянии $MO = 4$, проведены к этой плоскости наклонные MA, MB, MC под углами в 30°, 45°, 60° к прямой MO, перпендикулярной к плоскости P. Определить длину наклонных MA, MB и MC.

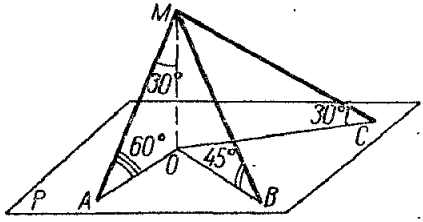


Рис. 195.

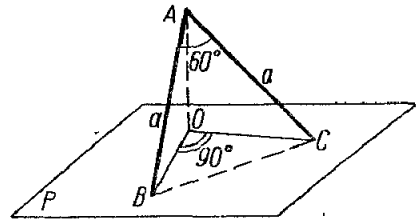


Рис. 196.

Решение. Пусть на рис. 195 $MO \perp P$, $\angle MAO = 60°$, $\angle MBO = 45°$ и $\angle MCO = 30°$, тогда из треугольника AMO находим $AO = \frac{1}{2} AM$ и (по теореме Пифагора) $AM^2 - AO^2 = MO^2$ или $\frac{3}{4} AM^2 = 16$, откуда $AM = \frac{8\sqrt{3}}{3}$;

из $\triangle MBO$ $(MO = OB)$, $MB = 4\sqrt{2}$;

из $\triangle MCO$ $(CM = 2MO)$, $MC = 8$.

Ответ: $MA = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $MB = 4\sqrt{2}$; $MC = 8$.

Задача 2. Из некоторой точки пространства проведены к данной плоскости две наклонные, каждая из которых равна a; угол между ними равен 60°, а угол между их проекциями на данную плоскость — прямой.

Найти: а) расстояние между основаниями наклонных;

б) расстояние от данной точки до плоскости;

в) угол между наклонными и плоскостью.

Решение. На рис. 196 $AO \perp P$, $AB = AC = a$ — наклонные, $\angle BOC = 90°$, $\angle BAC = 60°$.

а) $\triangle ABC$ — равнобедренный с углом в 60° при вершине, т. е. он равносторонний, поэтому расстояние между основаниями наклонных $BC = a$.

б) $\triangle BOC$ — равнобедренный прямоугольный (так как проекции OB и OC равных наклонных AB и AC равны), гипотенуза которого $BC = a$, тогда проекции $OB = OC = \frac{\sqrt{2}}{2} a$. Далее по теореме Пифагора из прямоугольного $\triangle AOC$ находим расстояние точки A от плоскости P: $AO = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{2} a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

в) Угол $ACO = ABO = 45°$, так как прямоугольные треугольники AOB и AOC равны между собою и одновременно являются равнобедренными треугольниками:

$$AO = OC = OB = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

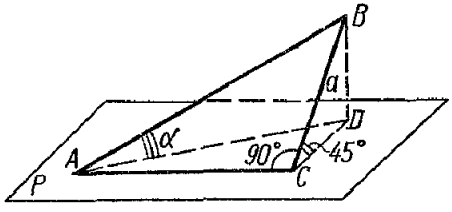


Рис. 197.

Задача 3. Если в равнобедренном прямоугольном треугольнике один катет лежит на плоскости P, а другой катет образует с ней угол в 45°, то гипотенуза образует с плоскостью P угол в 30°. Доказать.

Решение. В треугольнике ABC (рис. 197) угол $C = 90°$ и $AC = CB$. Катет AC лежит в плоскости P, а катет CB образует с ней угол в 45°; $BD \perp P$. Обозначим $AC = BC = a$, тогда из прямоугольного $\triangle CBD$ находим:

$$CD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

Гипотенуза данного прямоугольного треугольника ABC будет $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Тогда в прямоугольном треугольнике ABD катет $BD = \frac{1}{2} AD$ и, по известному свойству (см. § 12), угол $BAD = \alpha = 30°$, что и требовалось доказать.

Задача 4. Доказать, что если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла равные углы, то проекция этой наклонной на плоскость будет биссектрисой данного угла.

Решение. По условию задачи $\angle ABC$ лежит в плоскости P (рис. 198) и наклонная DB образует с его сторонами равные углы $\angle ABD = \angle DBC$. Из точки D опустим перпендикуляр DO на плос-

кость P и из точки O проведем $OM \perp AB$ и $ON \perp BC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах наклонные DM и DN будут перпендикулярны соответственно сторонам угла AB и BC. Прямоугольные треугольники DBM и DBN равны по общей гипотенузе DB и равным острым углам $\angle MBD = \angle NBD$. Тогда наклонная $DM = DN$, а значит, равны и их проекции $OM = ON$, но тогда равны $\triangle MOB = \triangle NOB$, а вместе с ними и углы $\angle MBO = \angle NBO$, т. е. OB — биссектриса угла ABC, что и требовалось доказать.

3. Параллельные прямые и плоскости. Теорема 7. Если плоскость перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

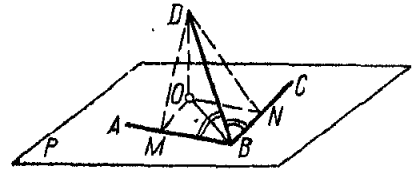


Рис. 198.

Теорема 8 (обратная теорема 7). Если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны.

Таким образом, если $AB \parallel CD$ и $AB \perp P$ (рис. 199), то и $CD \perp P$ и, наоборот, если $AB \perp P$ и $CD \perp P$, то $AB \parallel CD$.

Признаки параллельности прямой и плоскости выражаются теоремами 9 и 10.

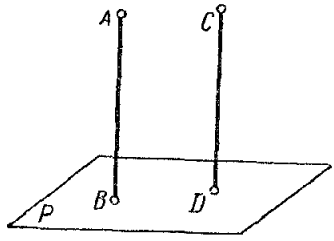


Рис. 199.

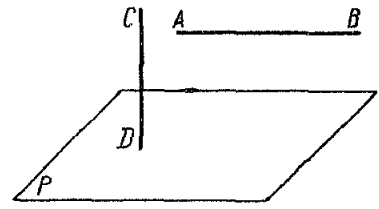


Рис. 200.

Теорема 9. Если плоскость P и прямая AB (рис. 200), не лежащая в плоскости P, перпендикулярны к одной и той же прямой CD, то они параллельны.

Теорема 10. Если прямая AB параллельна прямой CD, лежащей в плоскости P (рис. 201), то она параллельна плоскости P.

Теорема 11. Если две плоскости P и Q, проходящие соответственно через параллельные прямые AB и CD, пересекаются, то линия их пересечения MN параллельна обеим данным прямым AB и CD (рис. 202).

Теорема 12. Две прямые, параллельные одной и той же третьей прямой, параллельны между собой.

Теорема 13. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Из теоремы 13 вытекает **следствие**: если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна линии их пересечения

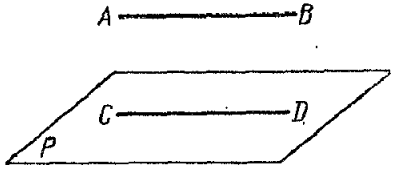


Рис. 201.

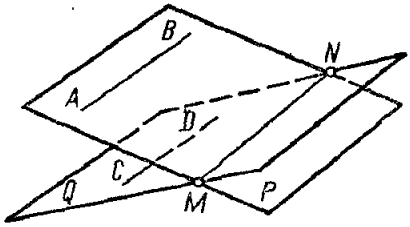


Рис. 202.

Теорема 14. Если одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, то и другая прямая параллельна той же плоскости или лежит в ней.

Теорема 15. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость и притом только одна, параллельная другой прямой.

Рассмотрим несколько задач на параллельность прямой и плоскости.

Задача 5. Правильный треугольник спроектирован на плоскость P; вершины треугольника отстоят от этой плоскости на расстоянии 10 *дм*, 15 *дм* и 17 *дм*. Найти расстояние от центра треугольника до плоскости P.

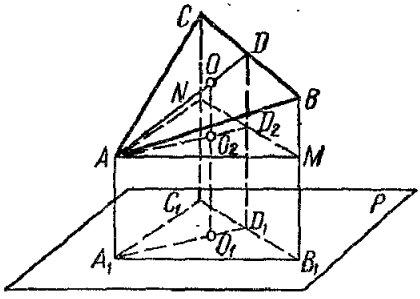


Рис. 203.

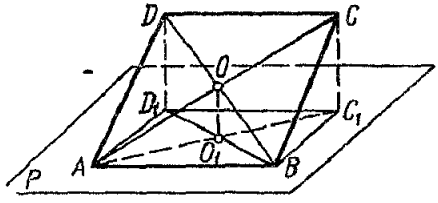


Рис. 204.

Решение. Точки A_1, B_1, C_1 (рис. 203) являются прямоугольными проекциями вершин A, B, C данного треугольника ABC на плоскость P. По условию задачи $AA_1 = 10$ *дм*, $BB_1 = 15$ *дм*, $CC_1 = 17$ *дм*. На перпендикулярах к плоскости отложим от их основания отрезки $B_1M = C_1N = AA_1 = 10$ *дм*. Тогда $MB = 5$ *дм*, а $NC = 7$ *дм*. Центр O

данного правильного треугольника ABC есть точка пересечения его медиан. Медиана AD треугольника ABC точкой O делится в отношении $AO : OD = 2 : 1$. Из точки D опустим на плоскость P перпендикуляр DD_2, который сторону $NM \triangle ANM$ разделит пополам: $ND_2 = D_2M$, т. е. AD_2 — медиана $\triangle ANM$.

DD_2 — как средняя линия трапеции $MBCN$ будет равна $\frac{1}{2}(BM + CN) = 6$ *дм*. Тогда из подобия треугольников AOO_2 и ADD_2 находим $OO_2 : DD_2 = AO : AD$ или $OO_2 : 6 = 2 : 3$; $OO_2 = 4$ *дм*, учитывая, что $O_2O_1 = AA_1 = 10$ *дм*, находим $OO_1 = OO_2 + O_2O_1 = 14$ *дм*.

Ответ: 14 *дм*.

Замечание. Расстояние центра правильного треугольника от некоторой плоскости равно среднему арифметическому расстояний его вершин от этой плоскости.

Задача 6. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 *см* от противолежащей стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 *см* и 2 *см*. Найти проекции сторон ромба на эту плоскость.

Решение. $ABCD$ — ромб, сторона AB которого лежит в плоскости P (рис. 204). По условию задачи перпендикуляры к плоскости P $DD_1 = CC_1 = 4$ *см*; $AC_1 = 8$ *см*, $D_1B = 2$ *см*. Требуется найти $BC_1 = AD_1$ и D_1C_1. Диагонали ромба находим из треугольника ACC_1 и BDD_1, откуда $AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ *см* и $BD = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ *см*. Тогда сторона ромба $DC = D_1C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{80 + 20} = 5$ *см*. Из $\triangle ADD_1$ находим $AD_1 = \sqrt{AD^2 - DD_1^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ *см*.

Ответ: 5 *см* и 3 *см*.

Задача 7. AB и CD — две параллельные прямые, лежащие в плоскости P на расстоянии 28 *см* одна от другой; EF — внешняя прямая, параллельная AB и удаленная от AB на 17 *см*, а от плоскости P на 15 *см*. Найти расстояние между EF и CD. (Два случая).

Решение. Первый случай, когда прямая EF проектируется на плоскость P в прямую E_1F_1, лежащую между заданными прямыми AB и CD (рис. 205). По условию задачи $MN = 28$ *см* ($MN \perp AB$), $ML = 17$ *см* ($ML \perp AB$) и $LL_1 = 15$ *см*. Прямая $LL_1 \perp P$, тогда треугольники LML_1 и LNL_1 — прямоугольные и, кроме того, по теореме о трех перпендикулярах $LN \perp CD$ и $LN \perp EF$, т. е. искомым расстоянием будет длина отрезка LN.

Из $\triangle MLL_1$ находим:

$$ML_1 = \sqrt{ML^2 - LL_1^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ см},$$

тогда

$$L_1N = MN - ML_1 = 20 \text{ см}.$$

Из $\triangle LL_1N$ находим искомое расстояние между прямыми EF и CD:

$$LN = \sqrt{LL_1^2 + L_1N^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ см}.$$

Второй случай, когда прямая EF проектируется на плоскость P в прямую E_1F_1, лежащую вне прямых AB и CD (рис. 206). (Возможен только случай, когда AB лежит между E_1F_1 и CD.)

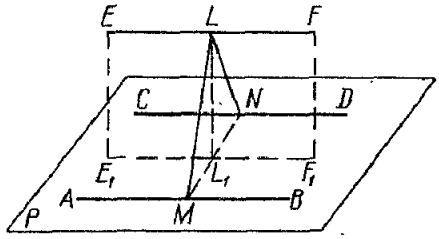


Рис. 205.

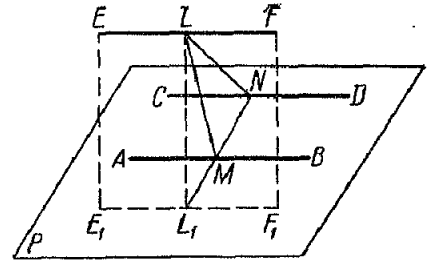


Рис. 206.

Аналогично тому, как это было сделано в первом случае, из $\triangle MLL_1$ находим:

$$ML_1 = \sqrt{ML^2 - LL_1^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8 \text{ см},$$

тогда

$$L_1N = MN + ML_1 = 36 \text{ см}.$$

Из $\triangle LL_1N$ имеем:

$$LN = \sqrt{LL_1^2 + L_1N^2} = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39 \text{ см}.$$

Ответ: 25 *см* или 39 *см*.

§ 41. Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не имеют общих точек.

Признаки параллельности плоскостей:

Теорема 1. Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.

Теорема 2. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие две плоскости параллельны.

Другими словами, если пересекающиеся прямые AB и BC лежат в плоскости P, а прямые A_1B_1 и B_1C_1 лежат в плоскости Q и $AB \parallel A_1B_1$, а $CB \parallel C_1B_1$ (рис. 207), то $P \parallel Q$.

Теорема 3. Две параллельные плоскости пересекаются третьей по параллельным прямым.

Другими словами, если плоскостн P и Q параллельные и плоскость M их пересекает, то прямые пересечения этих плоскостей AB и CD параллельны (рис. 208).

Теорема 4. Две плоскости, параллельные одной и той же третьей плоскости, параллельны между собой.

Теорема 5 (обратная теорема 4). Плоскость, пересекающая одну из параллельных плоскостей, пересечет и другую плоскость.

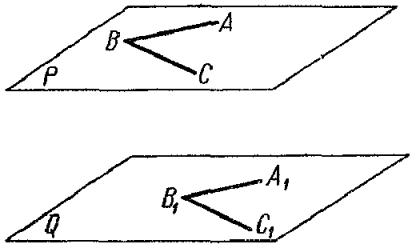


Рис. 207.

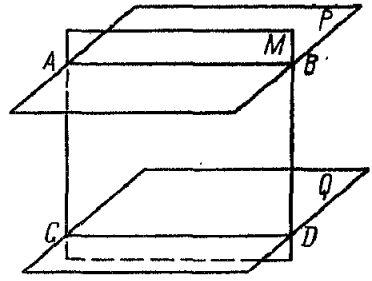


Рис. 208.

Теорема 6. Если прямая перпендикуляриа к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпенднкулярна и к другой плоскости.

Теорема 7. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны между собой.

Теорема 8. Два угла с соответственно параллельными и одинаково направленнымн сторонами равны между собой.

Рассмотрим несколько задач на параллельные плоскости.

Задача 1. Отрезки двух прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны 51 *см* и 53 *см*, а их проекции на одну из этих плоскостей относятся, как 6 : 7. Определить длину этих проекций и расстояние между данными плоскостями.

Решение. По условию задачи $P \parallel Q$, $AB = 51$ *см*, $A_1B_1 = 53$ *см*, $AC \perp Q$, и $A_1C_1 \perp Q$ и $BC : B_1C_1 = 6 : 7$ (рис. 209). Требуется определить BC, B_1C_1 и AC. Обозначим $BC = 6x$, $B_1C_1 = 7x$ и, учитывая, что $AC = A_1C_1$ из треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, получаем, что

$$AB^2 - BC^2 = A_1B_1^2 - B_1C_1^2 \text{ или } 51^2 - (6x)^2 = 53^2 - (7x)^2.$$

Отсюда:

$$13x^2 = 208 \text{ и } x = 4$$

и, следовательно, для искомых проекций имеем:

$$BC = 6x = 24 \text{ см}; \quad B_1C_1 = 7x = 28 \text{ см}.$$

Определив BC и зная AB, расстояние между плоскостями AC находим из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{51^2 - 24^2} = 45 \text{ см}.$$

Ответ: 24 *см*, 28 *см* и 45 *см*.

Задача 2. Между двумя параллельными плоскостями P и Q проведены отрезки AC и BD (точки A и B лежат в плоскости P); $AC = 13$ *см*; $BD = 15$ *см*; сумма длин проекций AC и BD на одну из данных плоскостей равна 14 *см*. Найти длины этих проекций и расстояние между данными плоскостями (рис. 210).

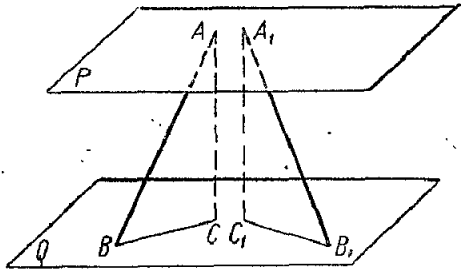


Рис. 209.

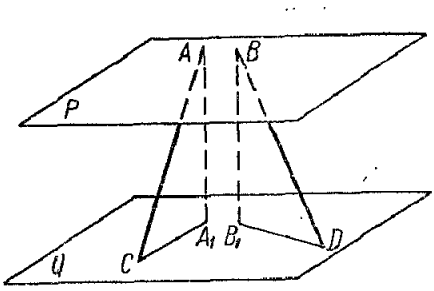


Рис. 210

Решение. По условию задачи $P \parallel Q$, $AC = 13$ *см*, $BD = 15$ *см* $AA_1 \perp Q$, $BB_1 \perp Q$ и $CA_1 + B_1D = 14$ *см*. Определить CA_1, B_1D и $AA_1 = BB_1$. Обозначим $CA_1 = x$, тогда $B_1D = 14 - x$.

Из прямоугольных треугольников AA_1C и BDB_1 находим:

$$AA_1^2 = AC^2 - A_1C^2 = BD^2 - B_1D^2$$

или

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2,$$

откуда

$$28x = 140 \text{ и } x = 5.$$

Следовательно,

$$CA_1 = 5 \text{ см}, \quad B_1D = 9 \text{ см и } AA_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ см}.$$

Задача 3. Вершины равностороннего треугольника со стороной a находятся вне плоскости P на одинаковом от нее расстоянии d. Из центра треугольника проведен перпендикуляр к его плоскости, равный h и направленный в сторону, противоположную плоскости P.

Из конца этого перпендикуляра проведены прямые через вершины треугольника до пересечения с плоскостью P. Определить длины отрезков этих прямых, лежащих между плоскостью треугольника и плоскостью P.

Р е ш е н и е. Треугольник ABC — равносторонний, $AB = AC = BC = a$, $OS \perp$ пл. ABC, $OS = h$, $\triangle A_2B_2C_2$ — прямоугольная проекция треугольника ABC на плоскость P, $AA_2 = BB_2 = CC_2 = d$. Определить AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 211).

Наклонные SA, SB, SC к плоскости $\triangle ABC$ равны между собой, так как их проекции OA, OB и OC — равны радиусу описанной окружности вокруг $\triangle ABC$. Легко показать, что $OA \parallel O_1A_1$; $OB \parallel O_1B_1$; $OC \parallel O_1C_1$, тогда углы A_1SO_1; B_1SO_1; C_1SO_1 пересечены параллельными прямыми, и, следовательно, по известному свойству из планиметрии (см. § 10), имеем:

$$A_1A : AS = B_1B : BS = C_1C : CS = O_1O : OS,$$

откуда

$$A_1A = B_1B = C_1C \text{ (так как } AS = BS = CS).$$

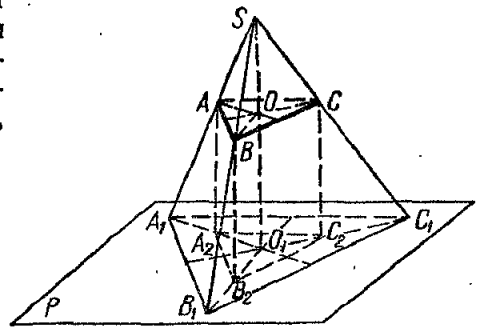


Рис. 211.

В таком случае из пропорции $A_1A : AS = O_1O : OS$ находим:

$$A_1A = \frac{AS \cdot OO_1}{OS} = \frac{AS \cdot d}{h}, \quad (OO_1 = AA_2 = d).$$

Далее из прямоугольного $\triangle AOS$ определяем

$$AS = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2} = \frac{\sqrt{3a^2 + 9h^2}}{3},$$

после чего получаем для искомой величины:

$$A_1A = \frac{d\sqrt{3(a^2 + 3h^2)}}{3h}.$$

О т в е т: $A_1A = B_1B = C_1C = \frac{d}{3h}\sqrt{3(a^2 + 3h^2)}$.

§ 42. Двугранные углы и перпендикулярные плоскости

Часть плоскости, лежащая по одну сторону какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости, называется *полуплоскостью*.

Двугранным углом называется геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями P и Q (рис. 212), исходящими из одной прямой AB. Прямая AB называется *ребром*, а полуплоскости P и Q — сторонами или *гранями двугранного угла*.

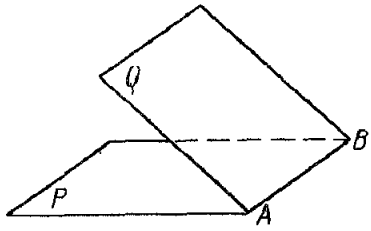


Рис. 212.

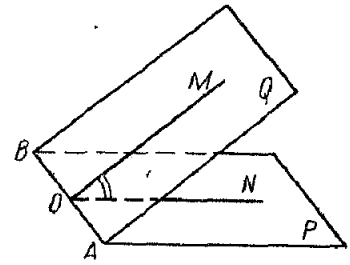


Рис. 213.

Двугранный угол обозначают или двумя буквами, поставленными у ребра, например, AB (рис. 212) или четырьмя буквами $PABQ$, из которых две средние обозначают ребро, а крайние — грани.

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный двумя перпендикулярами, восстановленными к ребру из произвольной его точки и лежащими на гранях угла (рис. 213). На рис. 213 ON лежит в плоскости P, а OM — в плоскости Q, причем $ON \perp AB$ и $OM \perp AB$, тогда угол MON называется линейным углом двугранного угла $PABQ$.

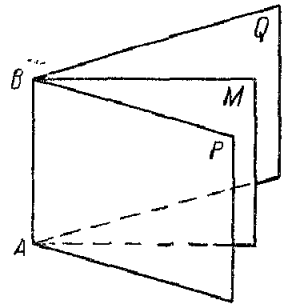


Рис. 214.

1. Равенство и неравенство двугранных углов. Два двугранных угла называются *равными*, если они при вложении совмещаются.

Если совместить по одной грани два неравных двугранных угла, то бо́льшим считают тот из них, между гранями которого заключена вторая грань второго двугранного угла. На рис. 214 двугранный угол $PABQ$ больше двугранного угла $PABM$.

Теорема 1. Если два двугранных угла равны, то и их линейные углы равны.

Если два двугранных угла не равны, то большему двугранному углу соответствует и больший линейный угол.

Теорема 2 (обратная теореме 1). Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.

Если линейные углы не равны, то большему линейному углу соответствует больший двугранный угол.

2. Прямой двугранный угол. Двугранные углы называются *смежными*, если у них одна грань общая, а две другие составляют одну плоскость.

Прямым двугранным углом называется каждый из равных смежных двугранных углов.

Плоскости, образующие прямой двугранный угол, называются *взаимно перпендикулярными*.

3. Измерение двугранных углов. Двугранный угол измеряется его линейным углом, т. е. за единицу измерения двугранных углов принимается такой двугранный угол, линейный угол которого содержит единицу измерения линейных углов. Так, двугранный угол

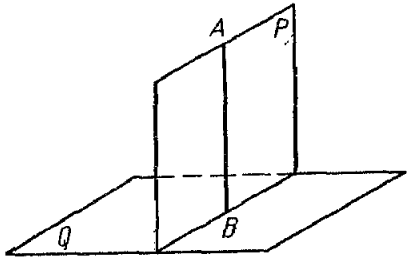


Рис. 215.

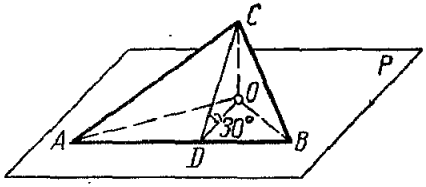


Рис. 216.

в 1° есть угол, линейный угол которого содержит 1°; двугранный угол в 1 радиан есть угол, линейный угол которого содержит 1 радиан.

4. Перпендикулярные плоскости. (Признак перпендикулярности плоскостей). Если плоскость P проходит через перпендикуляр AB к плоскости Q, то плоскости P и Q взаимно перпендикулярны (рис. 215).

Приведем следующие теоремы:

1. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная к их линии пересечения, перпендикулярна к другой плоскости.

2. Если две плоскости взаимно перпендикулярны и из какой-нибудь точки одной из них опущен перпендикуляр на другую, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.

3. Плоскость, перпендикулярная к двум пересекающимся плоскостям, перпендикулярна к ребру образованного ими двугранного угла.

4. Плоскость, перпендикулярная к ребру двугранного угла, перпендикулярна и к его граням. (Теорема 4, обратная теореме 3.)

Задача 1. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости,

которая проходит через гипотенузу и составляет угол в 30° с плоскостью треугольника.

Решение. Из вершины C треугольника ABC на гипотенузу AB опустим перпендикуляр CD и на плоскость P перпендикуляр CO (рис. 216). По теореме о трех перпендикулярах OD, как проекция наклонной CD на плоскость P, будет перпендикулярна к AB. Тогда $\angle CDO = 30°$ — будет линейным углом двугранного угла, образованного плоскостью треугольника ABC и плоскостью P.

Из $\triangle ABC$ находим, что

$$CD = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

и CO, как катет, лежащий против угла в 30° в $\triangle DCO$, будет равен $\frac{1}{2} CD$.

Ответ: $CO = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Задача 2. Данный отрезок имеет концы на двух взаимно перпендикулярных плоскостях и составляет с одной из них угол в 45°, а с другой — угол в 30°; длина этого отрезка равна a. Определить часть линии пересечения плоскостей, заключенную между перпендикулярами, опущенными на нее из концов данного отрезка.

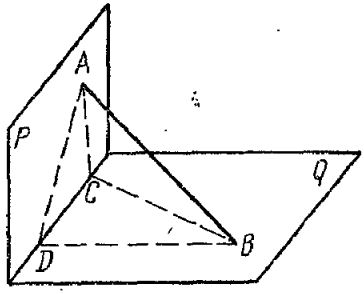


Рис. 217.

Решение. По условию задачи $Q \perp P$, $AB = a$, $\angle ABC = 30°$, а $\angle BAD = 45°$ ($AC \perp Q$ и $BD \perp P$). Определить CD (рис. 217).

Из $\triangle ACB$ ($\angle B = 30°$), $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$,

Из $\triangle ABD$ ($\angle A = 45°$), $AD = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда из прямоугольного треугольника ACD находим:

$$CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

Ответ: $CD = \frac{1}{2} a$.

§ 43. Задачи на построение в стереометрии

Решение задач на построение в пространстве существенно отличается от решения задач на построение в планиметрии. Содержание всякой задачи на построение состоит из трех частей: а) данных элементов; б) того, что требуется построить, и в) тех средств, с помощью которых задача должна быть решена.

Для построения пространственных фигур фактически не существует инструментов, аналогичных циркулю, линейке, угольнику и др., которые применяются при решении задач на построение в планиметрии. При решении задач на построение пространственных фигур обыкновенно описывается и логически обосновывается ход построения, который сопровождается схематическим чертежом. Таким образом, при решении задач на построение в пространстве основным является логическое обоснование построения, а чертеж является лишь иллюстрацией.

Способы и правила построения чертежей пространственных фигур изучаются в начертательной геометрии.

Задача на построение в стереометрии считается решенной, если она сведена к решению простейших задач. К таким относятся следующие задачи:

I. Провести плоскость через три точки, не лежащие на одной прямой.

II. Провести плоскость через прямую и точку, лежащую вне прямой.

III. Провести плоскость через две пересекающиеся или параллельные прямые.

IV. Построить линию пересечения двух данных плоскостей (если они пересекаются).

V. Решить любую задачу на построение в данной плоскости, если она допускает решение (пользуясь методами, изучаемыми в планиметрии).

Рассмотрим некоторые основные задачи на построение в стереометрии.

Задача 1. Построить плоскость, перпендикулярную к данной прямой и проходящую через данную точку.

Решение. Пусть дана точка A и прямая l. Требуется построить плоскость P, проходящую через точку A перпендикулярно к прямой l (рис. 218). Рассмотрим два случая.

а) Если точка A лежит вне прямой l, то через точку A и прямую l проводим плоскость M (задача II) и через l проводим произвольную плоскость N, не сливающуюся с плоскостью M. В плоскости M из точки A проводим перпендикуляр AO к прямой l, а в плоскости N из точки O восстановим перпендикуляр OB к пря-

мой l (задача V). Пересекающиеся прямые AO и OB определяют искомую плоскость P, которая будет единственной.

б) Если точка A лежит на прямой l, то через прямую l проводим две произвольные плоскости, в которых из точки A восстанавливаем перпендикуляры к прямой l. Эти перпендикуляры определят искомую плоскость P, которая также будет единственной. Таким образом, из точки вне (и на) прямой можно провести к этой прямой перпендикулярную плоскость и притом только одну.

Задача 2. Через данную точку провести перпендикуляр к данной плоскости.

Решение. Пусть дана точка A и плоскость P. Требуется провести через точку A перпендикуляр к плоскости P (рис. 219). Рассмотрим также два случая.

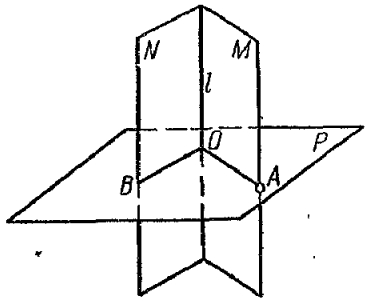


Рис. 218.

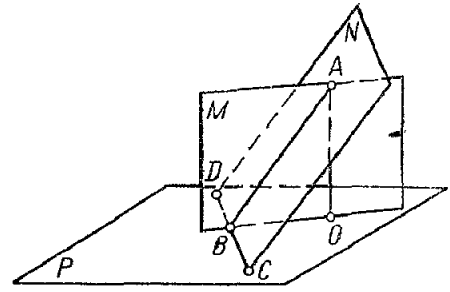


Рис. 219.

а) Если точка A лежит вне плоскости P, то проводим в плоскости P произвольную прямую CD (задача V) и через CD и данную точку A проводим плоскость N (задача II), в которой из A к DC проводим $AB \perp DC$ (задача V). После этого в плоскости P восстановим перпендикуляр BO к DC (задача V). Пересекающиеся прямые (задача III) определяют плоскость M, которая будет перпендикулярна к прямой CD. В плоскости M проводим перпендикуляр AO к BO (задача V), который будет искомым, т. е. $AO \perp P$.

б) Если данная точка лежит на плоскости P, то пусть на рис. 219 данной в задаче точкой будет точка O. Тогда проводим произвольную прямую CD в плоскости P, не проходящую через точку O. Из точки O проводим $OB \perp CD$ и через CD проводим произвольную плоскость N, не сливающуюся с плоскостью P. Восстанавливаем в плоскости N перпендикуляр BA к DC и через пересекающиеся прямые OB и BA проводим плоскость M, в которой восстанавливаем $OA \perp BO$. Легко доказать, что $AO \perp P$. Таким образом, через точку к данной плоскости всегда можно провести перпендикуляр и притом только один.

Задача 3. Через данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости.

Решение. Пусть дана точка A и плоскость P. Требуется провести плоскость Q через точку A, параллельную плоскости P (рис. 220).

В плоскости P проводим две произвольные пересекающиеся прямые OE и OD и через эти прямые и заданную точку A проводим плоскости M и N, которые пересекаются по прямой OA. В плоскости M проводим прямую $AB \parallel OE$, а в плоскости N — прямую $AC \parallel OD$. Прямые AB и AC определяют плоскость Q, которая проходит через точку A и параллельна данной плоскости P.

Если точка A лежит на плоскости P, то плоскости P и Q сливаются и их можно считать параллельными. Таким образом, через точку вне данной плоскости можно провести параллельную плоскость и притом только одну.

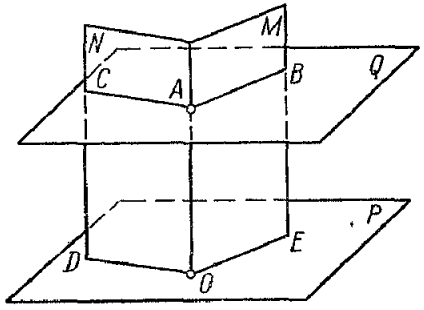


Рис. 220.

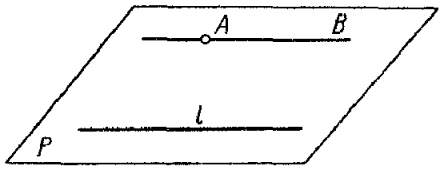


Рис. 221.

Задача 4. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Решение. Пусть дана точка A и прямая l. Требуется провести прямую, параллельную данной прямой l, и проходящую через точку A (рис. 221). Через данные точку A и прямую l проводим плоскость P и в ней через точку A проводим прямую AB, параллельную прямой l, которая и будет искомой и единственной.

Задача 5. Определить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Решение. Пусть даны две скрещивающиеся прямые l и m (рис. 222). Требуется определить расстояние между ними.

Задача определения расстояния между данными скрещивающимися прямыми сводится к построению прямой, пересекающей эти прямые и перпендикулярной к ним обеим.

Через произвольную точку C прямой l проводим прямую $MN \parallel m$ и через прямые MN и l проводим плоскость P, которая будет также параллельна прямой m. Из какой-нибудь точки F прямой m опускаем на плоскость P перпендикуляр и через прямые DF и m проводим плоскость Q, которая будет перпендикулярной к плоскости P. Пло-

скость Q пересечет прямую l в точке B. Через точку B проведем прямую, перпендикулярную к прямой m, которая пересечет ее в точке A. Таким образом, отрезок AB, концы которого лежат на данных скрещивающихся прямых l и m, перпендикулярный к каждой из этих прямых, т. е. длина отрезка AB и есть расстояние между заданными скрещивающимися прямыми.

Задача 6. Данный двугранный угол разделить плоскостью на два, равных между собой, двугранных угла. (Провести биссекторную плоскость.)

Решение. Дан двугранный угол $PABQ$ (рис. 223), требуется провести плоскость M, делящую двугранный угол пополам. Из произвольной точки O ребра AB данного двугранного угла восстанав-

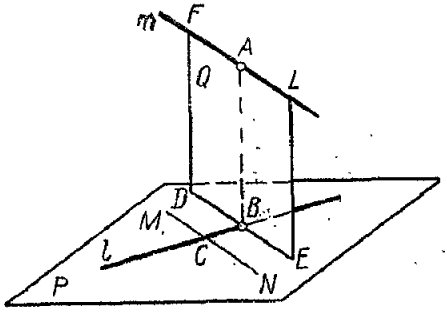


Рис. 222.

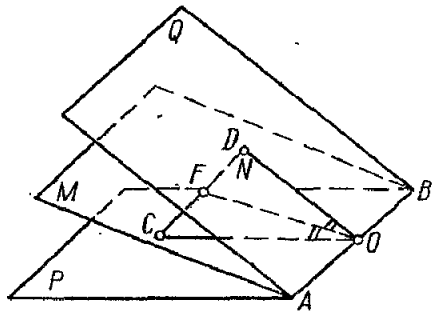


Рис. 223.

ливаем перпендикуляры OC и OD к этому ребру, лежащие в плоскостях P и Q; тогда угол COD будет линейным углом данного двугранного угла. Проведем плоскость N через прямые OC и OD, которая будет перпендикулярной к ребру AB. Построим биссектрису OF линейного угла COD. Через AB и OF проведем плоскость M, которая разделит данный двугранный угол на два равных угла $PABM = MABQ$. Построенная плоскость называется биссекторной плоскостью двугранного угла $PABQ$.

Задача 7. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.

Решение. Через любую точку данной прямой проведем перпендикуляр к данной плоскости (задача 2). Данная прямая и проведенный перпендикуляр определяют искомую плоскость, которая перпендикулярна к данной и проходит через данную прямую.

Задача 8. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к двум данным плоскостям.

Решение. Из данной точки опускаем перпендикуляры на данные плоскости (задача 2). Эти перпендикуляры и определяют искомую плоскость.

Задача 9. Через данную прямую провести плоскость, образующую с данной плоскостью заданный угол α.

Решение. а) Если данная прямая AB параллельна данной плоскости P (рис. 224), то через произвольную точку C данной прямой проводим плоскость M, перпендикулярную этой прямой, которая пересечет плоскость P по прямой, проходящей через точки D и E. В плоскости M строим угол $CED = \alpha$. В плоскости P через точку E проводим прямую FG, перпендикулярную к DE, которая по теореме о трех перпендикулярах будет перпендикулярна и к наклонной CE. Через прямые FG и CE проводим плоскость N. Двугранный угол $PFGN$ будет искомым, так как его линейный угол $CED = \alpha$.

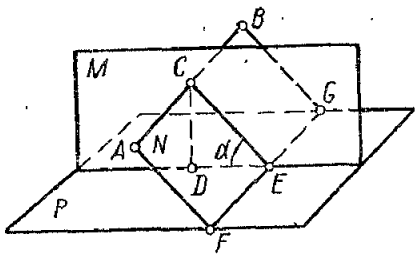


Рис. 224.

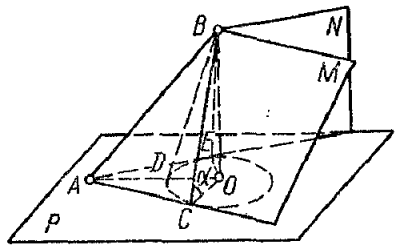


Рис. 225.

б) Если данная прямая AB пересекает плоскость P (рис. 225) и A их точка пересечения, то из точки B на плоскость P опустим перпендикуляр BO; через прямые AB и BO проведем плоскость AOB и в этой плоскости построим угол $BDO = \alpha$. Затем радиусом OD в плоскости P из точки O, как из центра, строим окружность, и к этой окружности из точки A в плоскости P проводим касательные AC и AE. Радиусы окружности, проведенные в точки касания, будут перпендикулярны к касательным

$$AC \perp OC; \quad AE \perp EO.$$

Построим теперь наклонные BC и BE, которые по теореме о трех перпендикулярах будут перпендикулярны к касательным AC и AE. Через прямые AB и BC проведем плоскость M, а через AB и BE плоскость N. Плоскости M и N будут искомыми, так как

$$\angle BCO = \angle BEO = \alpha,$$

а углы BCO и BEO есть линейные углы двугранных углов, образованных плоскостями M и P и соответственно плоскостями N и P.

§ 44. Многогранные углы

Многогранным углом называется фигура, состоящая из нескольких лучей OA, OB, OC, ..., OF, выходящих из одной точки O и не лежащих в одной плоскости, и из плоских углов AOB, BOC, ..., FOA между этими лучами (рис. 226).

Общая точка O пересечения всех лучей называется *вершиной* многогранного угла, лучи OA, OB, ..., OF — его *ребрами*, части плоскостей, заключенные между ребрами, называются его *гранями*, а углы AOB, BOC, ..., FOA, образованные ребрами, лежащими в одной грани, называются *плоскими углами* многогранного угла.

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости, совпадающей с любой его гранью. Два многогранные угла считаются *равными*, если они при наложении совпадают всеми своими частями.

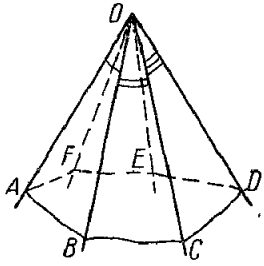


Рис. 226.

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

1. Трехгранные углы. Если число граней многогранного угла равно трем, то его называют *трехгранным* углом.

Основные свойства трехгранных углов выражаются следующими двумя теоремами.

1. *Сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего его плоского угла.*

2. *Каждый плоский угол трехгранного угла меньше разности двух других его плоских углов.*

Равными трехгранными углами называются такие углы, которые при наложении совмещаются во всех своих частях. Следовательно, у равных трехгранных углов все двугранные углы и плоские углы соответственно равны между собой, но обратное утверждение не справедливо. Существуют такие трехгранные углы, у которых двугранные и плоские углы соответственно равны, а трехгранные углы не равны между собой. Например, на рис. 227 изображены два трехгранных угла, у которых плоские и двугранные углы соответственно равны, а совместить эти углы невозможно. Трехгранные углы невозможно совместить из-за неодинаковой ориентации их соответственных граней относительно вершины. Грани AOB, BOC и COA — ориентированы относительно вершины O против движения часовой стрелки, а соответствующие грани A_1OB_1, B_1OC_1 и C_1OA_1 ориентированы по движению часовой стрелки и трехгранные углы $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ не равны, хотя в них равны и все плоские, и все двугранные углы.

Таким образом, для равенства двух трехгранных углов с соответственно равными плоскими и двугранными углами необходимо

еще, чтобы их грани были одинаково ориентированы относительно их вершин.

2. **Признаки равенства трехгранных углов.** Существуют признаки равенства трехгранных углов, аналогичные признакам равенства треугольников в планиметрии, которые выражаются следующими теоремами.

1. Если два одинаково ориентированных трехгранных угла имеют по равному плоскому углу, прилежащему к двум соответственно равным двугранным углам, то такие трехгранные углы равны.

2. Если два одинаково ориентированные трехгранных угла имеют по два равных плоских угла, плоскости которых образуют равные двугранные углы, то такие трехгранные углы равны.

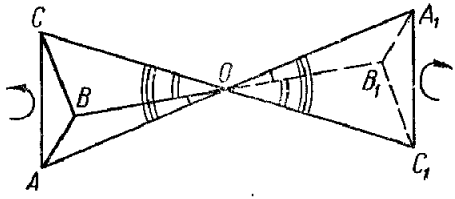


Рис. 227.

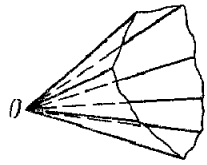


Рис. 228.

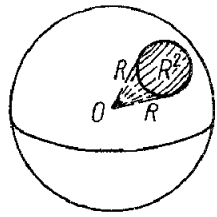


Рис. 229.

3. Если два одинаково ориентированных трехгранных угла имеют по три соответственно равных плоских угла, то такие трехгранные углы равны.

4. Если два трехгранных угла одинаково ориентированы и имеют по три соответственно равных двугранных угла, то такие трехгранные углы равны.

3. Телесный угол. Часть пространства, ограниченная пучком прямых, проведенных из одной точки (вершины) ко всем точкам какой-либо замкнутой линии, называется *телесным углом* (рис. 228).

Мерой телесного угла является площадь поверхности, вырезаемая данным телесным углом на сфере радиуса R с центром в вершине этого угла.

Единица измерения телесного угла называется *стерадианом* (от греч. στερεός — пространственный и слова радиан, происходящего от лат. *radius* — луч, радиус).

Один стерадиан — это такой телесный угол, который вырежет на поверхности сферы радиуса R фигуру с площадью, равной R^2. Вершина телесного угла при этом должна быть помещена в центре сферы (рис. 229).

Рассмотрим несколько задач на многогранные углы.

Задача 1. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°; на одном из ребер отложен от вершины отрезок, равный 3,

и из конца его опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найти длину этого перпендикуляра.

Решение. Дан трехгранный угол $OMNP$, плоские углы которого MON, NOP, POM равны по 60° и отрезок $AO = 3$, $AD \perp$ пл. NOP. Найти длину AD (рис. 230). Из основания перпендикуляра AD опустим на лучи OP и ON перпендикуляры $CD \perp OP$ и $DB \perp ON$ и точку D соединим с точкой O. Проведем отрезки AC и AB, которые по теореме о трех перпендикулярах будут соответственно перпендикулярными к OP и ON.

Из прямоугольного треугольника ACO ($\angle A = 30°$, так как по условию $\angle AOC = 60°$) находим:

$$OC = \frac{1}{2} OA = \frac{3}{2}.$$

В $\triangle OCD$ ($\angle C = 90°$, $\angle COD = 30°$) $OD = 2CD$ и по теореме Пифагора имеем:

$$OD^2 - CD^2 = OC^2$$

или

$$3CD^2 = \frac{9}{4}, \quad CD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{а } OD = \sqrt{3}.$$

Из $\triangle ADO$ по теореме Пифагора получаем:

$$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $AD = \sqrt{6} \approx 2{,}4495$.

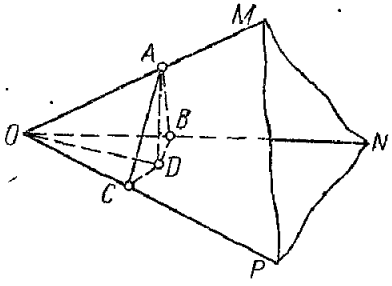


Рис. 230.

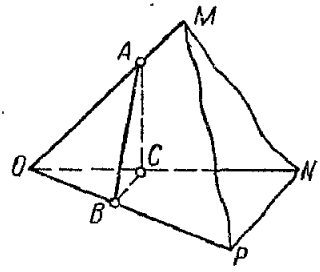


Рис. 231.

Задача 2. В трехгранном углу два плоских угла по 45°, двугранный угол между ними прямой. Найти третий плоский угол.

Решение. В трехгранном углу $OMNP$ $\angle MON = \angle NOP = 45°$, а $\angle MNOP = 90°$. Найти угол $MOP = \alpha$ (рис. 231).

Из произвольной точки C ребра ON строим линейный угол ACB двугранного угла $MNOP$, тогда по условию задачи $\angle ACB = 90°$. Так как углы $AOC = BOC = 45°$, то $AC = OC = CB$ и прямоуголь-

ные треугольники ACO, ACB и BCO равны между собой, тогда $AB = AO = BO$ и искомый угол $AOB = 60°$.

Ответ: 60°.

Задача. 3. В трёхгранном углу все плоские углы прямые. Внутри этого угла дана точка на расстоянии 10 *см*, 20 *см*, 20 *см* от его граней. Найти расстояние данной точки от вершины трехгранного угла.

Решение. Дан трехгранный угол $OMNP$, плоские углы которого $\angle MON = \angle NOP = \angle POM = 90°$; $AB \perp$ пл. MON, $AC \perp$ пл. NOP, $AD \perp$ пл. MOP; $AB = 10$ *см*, $AC = 20$ *см*, $AD = 20$ *см*. Найти AO (рис. 232).

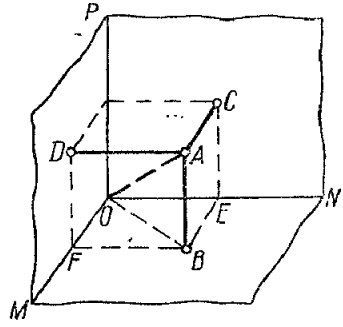


Рис. 232.

Из точки B опустим перпендикуляры на ребра ON и OM трехгранного угла: $BE \perp NO$ и $BF \perp MO$. Легко показать, что $BE = AC = BF = AD = OE = 20$ *см*. Из $\triangle OBE$ ($\angle E = 90°$) находим

$$OB = \sqrt{BE^2 + EO^2},$$

после чего из $\triangle ABO$ ($\angle B = 90°$) получаем

$$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{AB^2 + BE^2 + OE^2}$$

или

$$OA = \sqrt{AB^2 + AC^2 + AD^2} = \sqrt{100 + 400 + 400} = 30.$$

Ответ: 30 *см*.

МНОГОГРАННИКИ

§ 45. Основные определения

Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из частей плоскостей, ограниченных многоугольниками.

Гранями многогранника называются части плоскостей (многоугольники), ограничивающие многогранник. *Ребрами* многогранника называются общие стороны смежных граней (многоугольников). *Вершинами* многогранника называются вершины многогранных углов, образованных его гранями, сходящимися в одной точке. *Диагональю* многогранника называется отрезок прямой, соединяющей две вершины многогранника, не лежащие в одной грани. *Диагональной плоскостью* многогранника называется плоскость, проходящая через три вершины многогранника, не лежащие в одной грани. *Сечением* многогранника плоскостью называется часть этой плоскости, ограничен-

ная линией пересечения поверхности многогранника с этой плоскостью. Многогранник называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости любой его грани. *Гранями* выпуклого многогранника могут быть только выпуклые многоугольники.

§ 46. Призма и параллелепипед

1. Призма. *Призмой* называется многогранник, две грани которого параллельны, а остальные пересекаются по параллельным прямым (рис. 233). Параллельные грани называются *основаниями призмы*, а все остальные грани — *боковыми гранями*.

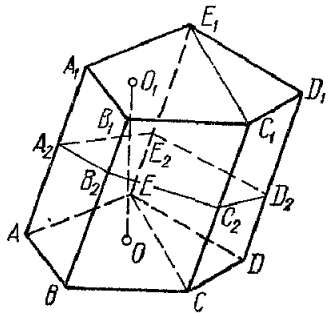


Рис. 233.

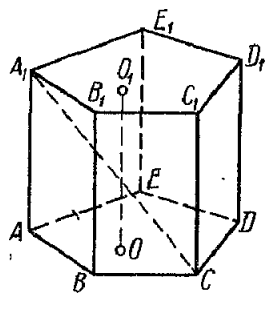


Рис. 234.

Из определения призмы следует, что в основаниях призмы лежат равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а боковые грани призмы параллелограммы.

Общие стороны боковых граней призмы называются *боковыми ребрами* призмы.

Отрезок OO_1 (рис. 233) прямой, перпендикулярный к плоскостям оснований призмы и заключенный между ними, называется *высотой* призмы. *Диагональной плоскостью* призмы принято называть плоскость, проходящую через диагональ основания и боковое ребро призмы, а фигуру E_1C_1CE (рис. 233), полученную при пересечении этой плоскости с поверхностью призмы, называют *диагональным сечением* призмы. Сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к ее боковым ребрам, называют *перпендикулярным сечением* призмы. На рис. 233 фигура $A_2B_2C_2D_2E_2$ является перпендикулярным сечением рассматриваемой призмы.

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны к плоскости основания (рис. 234) и *наклонной* — если ее боковые ребра не перпендикулярны к плоскости основания (рис. 233). В прямой призме высота OO_1 параллельна всем ее боковым ребрам AA_1, BB_1, CC_1, ...

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания — правильные многоугольники. Призма называется *треугольной*, *четырехугольной*, *пятиугольной* и т. д., в зависимости от того, какой многоугольник лежит в основании призмы.

2. **Параллелепипед.** *Параллелепипедом* называется призма, основаниями которой служат параллелограммы (рис. 235).

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется *прямым*. В противном случае параллелепипед называется *наклонным*.

Прямой параллелепипед, основания которого прямоугольники, называется *прямоугольным*. Все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники. Длина каждого из трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называется *измерениями* параллелепипеда. Прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны между собой, называется *кубом*.

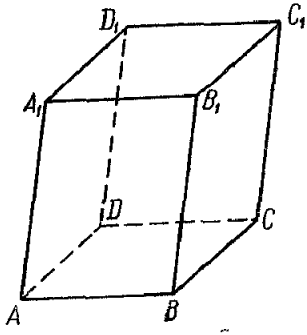


Рис. 235.

3. **Некоторые свойства параллелепипеда.** В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.

2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

3. Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

4. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Следствие. В прямоугольном параллелепипеде все четыре диагонали равны между собой.

4. **Поверхность призмы и параллелепипеда.** *Боковой поверхностью призмы* (параллелепипеда) называется сумма площадей всех ее боковых граней.

Полной поверхностью призмы (параллелепипеда) называется сумма ее боковой поверхности и площадей оснований.

Боковая поверхность призмы (параллелепипеда) равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

§ 47. Объем призмы и параллелепипеда

1. **Основные допущения об объемах.** *Объемом геометрического тела* называется величина части пространства, занимаемого этим телом.

Условились рассматривать объем как величину, обладающую следующими свойствами:

а) равные тела имеют равные объемы;

б) объем какого-нибудь тела, состоящего из частей, равен сумме объемов этих частей;

в) если из двух геометрических тел первое содержится целиком внутри второго, то объем первого тела не превосходит объема второго.

Тела, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

В качестве единицы объема принимается объем куба, ребро которого равно единице длины. Если ребро куба равно 1 *см*, то его объем считают равным одному кубическому сантиметру и сокращенно записывают 1 *куб. см* или 1 $см^3$. Если ребро куба равно 1 *м*, то его объем равен 1 $м^3$ и т. д.

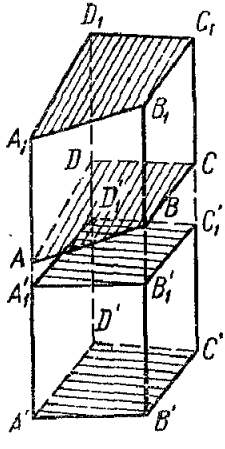


Рис. 236.

2. Объем параллелепипеда. *Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений*:

$$V = abc \text{ куб. ед.},$$

где a, b, c — измерения параллелепипеда.

Объем куба равняется кубу его ребра.

Объем прямоугольного и наклонного параллелепипеда равен произведению его площади основания на высоту.

3. Объем призмы. *Наклонная призма равновелика такой прямой призме, основание которой равно перпендикулярному сечению наклонной призмы, а высота — ее боковому ребру* (рис. 236).

На рис. 236 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонная призма, а $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — прямая призма, основание которой $A'B'C'D'$ перпендикулярно к боковым ребрам наклонной призмы, а высота (боковое ребро) $A'A_1' = AA_1 = H$.

В таком случае

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = V_{A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'}.$$

Объем призмы равен произведению площади основания на высоту:

$$V = H \cdot S_{\text{осн}},$$

где $S_{\text{осн}}$ — площадь основания $ABCDE$, а $H = OO_1$ — высота (рис. 233).

4. Принцип Кавальери. Ученик Галилео Галилея итальянский математик Бонавентура Кавальери (1598—1647) в книге «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых частей непре-

рывных величин», вышедшей в 1635 г., сформулировал предложение, которое носит название *принципа Кавальери.*

Если два тела могут быть расположены так, что любая плоскость, параллельная какой-нибудь данной плоскости и пересекающая оба тела, дает в сечении с ними равновеликие фигуры, то объемы таких тел равны.

Рассмотрим теперь несколько типичных задач, дополняющих результаты, изложенные выше.

Задача 1. Ребро куба равно a. Найти кратчайшее расстояние от диагонали куба до непересекающего ее ребра.

Решение. Дан куб* AC_1, ребро которого $AA_1 = a$. Найти расстояние между AA_1 и BD_1 (рис. 237). Прямые AA_1 и BD_1 скрещивающиеся. Расстояние между ними будет равно расстоянию любой точки ребра AA_1 до диагональной плоскости куба BB_1D_1D. Опустив из точки A на плоскость BB_1D_1D перпендикуляр AO, из прямоугольного $\triangle AOB$ найдем, что $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

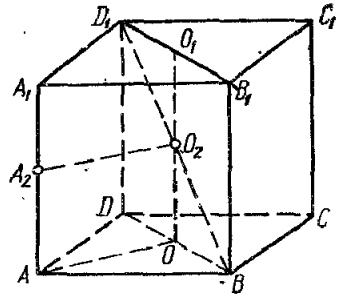


Рис. 237.

Ответ: $A_2O_2 = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2. Дан прямоугольный параллелепипед, основанием которого служит квадрат. Построить сечение плоскостью, проходящей через вершину основания параллелепипеда параллельно диагонали основания и отсекающей на оси параллелепипеда (считая от основания, через вершину которого проведена плоскость) отрезок длины m. Вычислить площадь сечения, если сторона основания параллелепипеда равна a, а его высота равна h.

Решение. Строим прямоугольный параллелепипед AC_1 основанием которого служит квадрат $ABCD$ со стороной $AB = a$ и высотой $AA_1 = OO_1 = h$ (рис. 238). На оси параллелепипеда OO_1 (отрезок, соединяющий центры оснований), от точки O откладываем данный отрезок $OM = m$. В диагональной плоскости BB_1D_1D проводим прямую BM, которая пересечет ломаную DD_1B_1 в точке N, лежащей на ребре DD_1, если $m \leqslant \frac{1}{2}h$, и лежащей на отрезке D_1O_1 диагонали основания D_1B_1, если $\frac{1}{2}h < m \leqslant h$.

* При обозначении многогранников часто не указывают всех его вершин, а ограничиваются лишь указанием каких-либо двух вершин, достаточно полно характеризующих этот многогранник. Так, в данном случае вместо куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно сказать: куб AC_1.

Рассмотрим два случая.

а) Если $m \leqslant \frac{1}{2}h$, то в диагональной плоскости AA_1C_1C параллелепипеда проводим через точку M прямую, параллельную диагонали основания AC. Пусть эта прямая пересечет ребра AA_1 и CC_1 соответственно в точках P и Q (рис. 238). Прямые BN и PQ полностью определяют искомую плоскость $BPNQ$, которая проходит через вершину основания B параллельно диагонали AC ($PQ \parallel AC$) и отсекает на оси OO_1 отрезок $OM = m$. Построив следы пересечения секущей плоскости с поверхностью параллелепипеда (т. е. те прямые, по

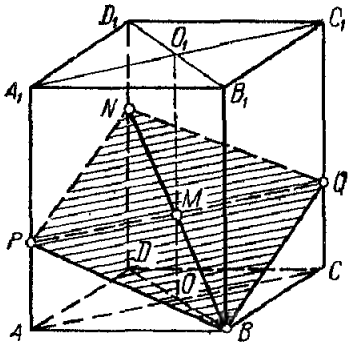


Рис. 238.

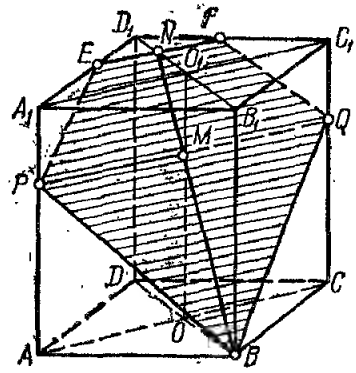


Рис. 239.

которым эта плоскость пересекает грани параллелепипеда), получим фигуру сечения. Легко показать, что фигура $BPNQ$ — ромб. Площадь ромба $BPNQ$:

$$S = \frac{1}{2} BN \cdot PQ,$$

где $PQ = AC = a\sqrt{2}$, как диагональ квадрата $ABCD$, а из прямоугольного $\triangle BMO$:

$$BN = 2BM = 2\sqrt{\frac{a^2}{2} + m^2} = \sqrt{2a^2 + 4m^2}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2a^2 + 4m^2} = a\sqrt{a^2 + 2m^2}.$$

б) Если $\frac{1}{2}h < m \leqslant h$, то точка N лежит на отрезке D_1O_1 (рис. 239).

В плоскости AA_1C_1C через точку M проводим прямую PQ, параллельную AC. Пересекающиеся прямые BN и PQ полностью опреде-

ляют секущую плоскость, которая пересечет основание $A_1B_1C_1D_1$ по прямой EF, параллельной PQ ($PQ \parallel$ пл. $A_1B_1C_1D_1$). Соединяя последовательно точки пересечения секущей плоскости с ребрами параллелепипеда, найдем фигуру сечения $BPEFQ$. Легко показать, что она состоит из равнобедренного треугольника PBQ и равнобедренной трапеции $PEFQ$, высотами которых соответственно будут отрезки BM и MN.

Поэтому площадь искомого сечения найдем по формуле:

$$S = \frac{1}{2}PQ \cdot BM + \frac{1}{2}(PQ + EF) \cdot MN.$$

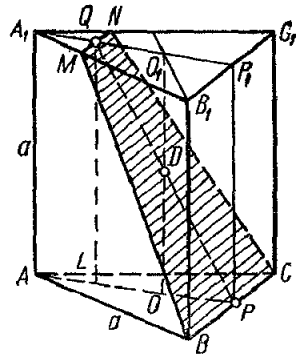


Рис. 240.

Из прямоугольника $APQC$ находим:

$$PQ = AC = a\sqrt{2}.$$

Из $\triangle MOB$ ($\angle MOB = 90°$) по теореме Пифагора имеем:

$$BM = \sqrt{MO^2 + OB^2} = \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2m^2 + a^2}.$$

Из подобия треугольников MOB и MO_1N находим

$$NM = \frac{MB \cdot MO_1}{MO}$$

или

$$NM = \frac{\frac{h-m}{\sqrt{2}}\sqrt{2m^2 + a^2}}{m} = \frac{(h-m)\sqrt{2m^2 + a^2}}{m\sqrt{2}}.$$

Из этих же треугольников получаем, что

$$O_1N = \frac{OB \cdot O_1M}{MO}$$

или

$$O_1N = \frac{a(h-m)}{m\sqrt{2}}.$$

Из равнобедренного прямоугольного треугольника ED_1F определяем

$$EF = 2D_1N = 2\,(D_1O_1 - NO_1)$$

или

$$EF = 2\left[\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a\,(h-m)}{m\sqrt{2}}\right] = \frac{a\,(2m-h)\sqrt{2}}{m}.$$

Подставляя найденные значения PQ, BM, EF и MN в формулу площади сечения, после несложных преобразований, получим:

$$S = \frac{a\,(4mh - 2m^2 - h^2)\sqrt{a^2 + 2m^2}}{2m^2}.$$

Ответ: а) $S = a\sqrt{a^2 + 2m^2}$, если $m \leqslant \frac{1}{2}h$,

б) $S = \frac{a\,(4mh - 2m^2 - h^2)\sqrt{a^2 + 2m^2}}{2m^2}$, если $\frac{1}{2}h < m \leqslant h$.

Задача 3. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно a. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Найти площадь этого сечения и вычислить ее при $a = 7{,}6$ *см*.

Решение. Дана правильная призма, все ребра которой $AA_1 = AB = BC = CA = a$ (рис. 240). Через ребро основания BC и середину D оси OO_1 проведем плоскость, которая пересечет основание $A_1B_1C_1$ по прямой, параллельной B_1C_1. Точки пересечения этой прямой с ребрами A_1B_1 и A_1C_1 соответственно обозначим через M и N. Соединив точки M и B; N и C, получим сечение $BMNC$. Так как $MN \parallel BC$, то $BMNC$ — трапеция и ее высотой будет отрезок PQ ($LP \perp BC$, следовательно, и $QP \perp BC$). Тогда площадь сечения $BMNC$

$$S = \frac{1}{2}(BC + MN) \cdot QP.$$

По условию задачи $BC = a$; $\triangle DOP = \triangle DO_1Q$ ($OD = DO_1$; $\angle PDO = \angle QDO_1$ и эти треугольники прямоугольные).

Тогда $OP = O_1Q = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (как радиус вписанной окружности в $\triangle ABC$). Из прямоугольника LQO_1O получим:

$$QO_1 = LO = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Так как $QL = AA_1 = a$, то из прямоугольного треугольника QLP находим:

$$PQ = \sqrt{LP^2 + LQ^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Из подобия треугольников A_1MN и $A_1B_1C_1$ ($MN \parallel B_1C_1$) имеем:

$$\frac{MN}{B_1C_1} = \frac{A_1Q}{A_1P_1} = \frac{1}{3}$$

или

$$MN = \frac{1}{3} B_1C_1 = \frac{1}{3} a.$$

Подставляя найденные значения BC, PQ и MN в формулу площади сечения, найдем:

$$S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{3}a\right) \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: $S = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}7698a^2$; при $a = 7{,}6$ *см* $S \approx 44{,}46$ *см*^{2}.

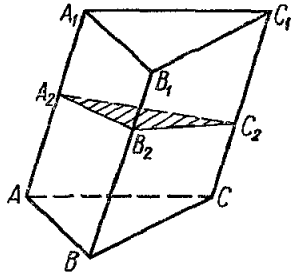


Рис. 241.

Задача 4. В наклонной треугольной призме боковые ребра содержат по 8 *см*; стороны перпендикулярного сечения относятся, как 9 : 10 : 17, а его площадь равна 144 *см*^{2}. Определить боковую поверхность этой призмы.

Решение. Пусть дана призма AC_1; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 8$ *см*, $A_2B_2C_2$—перпендикулярное сечение призмы, причем $A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2 = 9 : 10 : 17$ и $S_{A_2B_2C_2} = 144$ *см*^{2} (рис. 241).

Требуется определить боковую поверхность призмы:

$$S_{\text{бок}} = (A_2B_2 + B_2C_2 + C_2A_2) \cdot AA_1.$$

По условию задачи $AA_1 = 8$ *см*, а $A_2B_2 : B_2C_2 : C_2A_2 = 9 : 10 : 17$. Обозначим $A_2B_2 = 9x$, $B_2C_2 = 10x$, $C_2A_2 = 17x$. Тогда по формуле Герона площадь перпендикулярного сечения будет равна:

$$\sqrt{18x \cdot x \cdot 8x \cdot 9x} = 36x^2,$$

а по условию она равна 144 *см*^{2}, т. е.

$$36x^2 = 144,$$

откуда

$$x = 2 \text{ см}.$$

В таком случае

$$A_2B_2 + B_2C_2 + C_2A_2 = 36x = 72 \text{ см},$$

и, следовательно,

$$S_{\text{бок}} = 72 \cdot 8 = 576 \text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{\text{бок}} = 576$ см^2.

Задача 5. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна m^2, а расстояние ее от противолежащего ребра равно $2a$. Найти объем призмы.

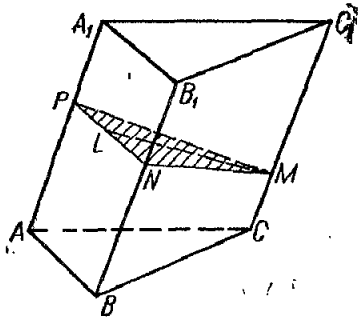


Рис. 242.

Решение. Пусть на рис. 242 PMN перпендикулярное сечение призмы AC_1 и $ML \perp PN$, тогда по условию задачи $ML = 2a$, а $PN \cdot BB_1 = m^2$. Известно, что объем призмы равен

$$V = BB_1 \cdot S_{PMN}$$

или

$$V = \frac{1}{2} PN \cdot ML \cdot BB_1 =$$

$$= \frac{1}{2}(PN \cdot BB_1) \cdot ML = \frac{1}{2} m^2 \cdot 2a = am^2.$$

Ответ: $V = am^2$.

Задача 6. Определить объем прямоугольного параллелепипеда по площадям его граней: Q_1, Q_2 и Q_3.

Решение. Обозначим измерения параллелепипеда через x, y и z. Тогда

$$xy = Q_1; \quad xz = Q_2; \quad yz = Q_3.$$

Перемножив правые и левые части этих равенств, получим:

$$(xyz)^2 = Q_1Q_2Q_3,$$

откуда

$$V = xyz = \sqrt{Q_1Q_2Q_3}.$$

Ответ: $V = \sqrt{Q_1Q_2Q_3}$ куб. ед.

Упражнения. 1. Построить и найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей перпендикулярно его диагонали через ее середину, если ребро куба равно a.

2. Дана правильная шестиугольная призма, боковое ребро которой равно e, а сторона основания равна a. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через середины смежных сторон основания и середину ее оси, и найти площадь сечения.

3. Ребра прямого параллелепипеда, выходящие из одной вершины, относятся как 1 : 2 : 3, причем боковое ребро больше сторон

основания. Через середины двух сторон основания, образующих большой угол, проведено сечение, параллельное диагонали, которая соединяет вершины двух тупых углов оснований. В каком отношении это сечение делит боковую поверхность параллелепипеда?

Указание. О построении сечений многогранников плоскостью см. § 53.

§ 48. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, ограниченный гранями многогранного угла и плоскостью, пересекающей все его грани (рис. 243).

Основанием пирамиды называется многогранник, полученный в секущей плоскости ($ABCDE$). Боковыми *гранями* пирамиды называются треугольники ASB, BSC, CSD, DSE, ESA с общей вершиной S, которая называется *вершиной* пирамиды. Боковыми *ребрами* пирамиды называются ребра, по которым пересекаются боковые грани. *Высотой пирамиды* называется перпендикуляр SO, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания. Пирамида называется *правильной*, если ее основание — правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника. *Апофемой* правильной пирамиды называется высота ее боковой грани.

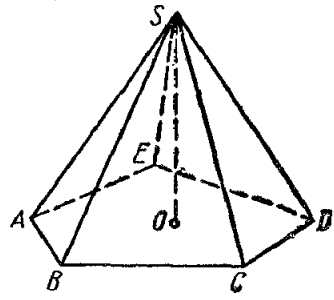


Рис. 243.

Отметим, что в пирамиде буквой S обычно обозначают и ее вершину и поверхность (полную или отдельных ее частей). Однако это не приводит к недоразумению, так как по смыслу всегда ясно, о чем идет речь в данном случае. Кроме того, если рассматривают поверхность или площадь, то в обозначение часто еще вводят дополнительные индексы, например, $S_{бок}$ (боковая поверхность), S_{ABCD} (площадь основания $ABCD$), S_{ASB} (площадь грани ASB) и т. д.

1. Свойства сечений пирамиды плоскостью, параллельной основанию

Теорема 1. Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то:

а) боковые ребра и высота пирамиды разделяются этой плоскостью на пропорциональные отрезки;

б) в сечении получится многоугольник, подобный многоугольнику, лежащему в основании;

в) площади сечения и основания будут относиться между собой, как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.

На рис. 244 изображена пирамида $SABCD$ и параллельные плоскости $A_1B_1C_1D_1 \parallel ABCD$. В таком случае

а) $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD}$;

б) многоугольник $A_1B_1C_1D_1$ подобен многоугольнику $ABCD$;

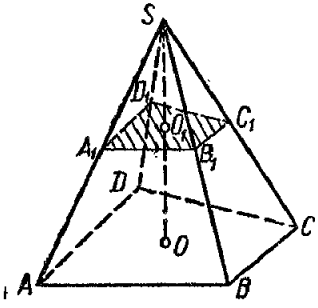


Рис. 244.

в) $\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1}{\text{пл. } ABCD} = \frac{SO_1^2}{SO^2}$.

Теорема 2. Если две пирамиды с равными высотами пересечь плоскостями, параллельными основаниям, на одинаковом расстоянии от вершины, то площади сечений будут пропорциональны площадям оснований.

На рис. 245 изображены пирамиды $SABCD$ и $S'A'B'C'$, высоты которых равны $SO = S'O'$. На одинаковых расстояниях от вершины $SO_1 = SO_1'$ проведены плоскости $A_1B_1C_1D_1$ и $A_1'B_1'C_1'$, параллельные, основаниям пирамид. Тогда

$$\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1D_1}{\text{пл. } A_1'B_1'C_1'} = \frac{\text{пл. } ABCD}{\text{пл. } A'B'C'}.$$

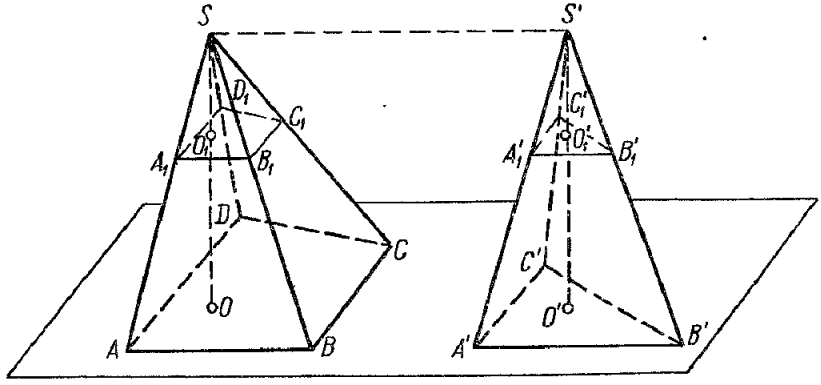


Рис. 245.

Следствие. Если у двух пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами провести параллельные основаниям сечения на одинаковых расстояниях от вершины, то сечения будут равновеликими.

2. Поверхность пирамиды. *Боковой* поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Полной поверхностью пирамиды называется сумма ее боковой поверхности и площади основания.

Боковая поверхность правильной пирамиды равна половине произведения периметра многоугольника основания на апофему:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} mP,$$

где P — периметр многоугольника основания, а m — апофема.

3. Объем пирамиды. *Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту:*

$$V = \frac{1}{3} BH,$$

где B — площадь основания, а H — высота пирамиды.

Рассмотрим теперь несколько типичных задач для пирамиды.

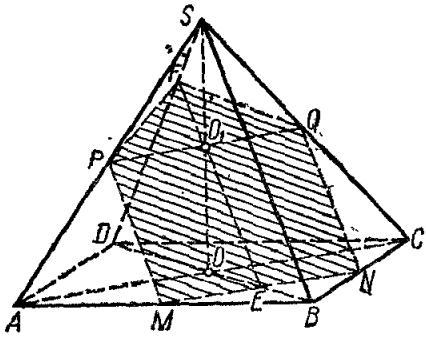


Рис. 246.

Задача 1. Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно a. Провести сечение через середины двух смежных сторон основания и середину высоты. Найти площадь сечения и вычислить ее при $a = 13{,}27$ *см*.

Решение. Пусть $SABCD$ данная пирамида, у которой $AB = BC = CD = DA = AS = BS = CS = DS = a$ (рис. 246). Построим требуемое условием задачи сечение. Для этого середины сторон основания AB и BC соединим отрезком прямой MN, точку пересечения которого с диагональю BD обозначим буквой E. Середину высоты пирамиды обозначим точкой O_1 ($OO_1 = O_1S$). Прямая MN и точка O_1 полностью определяют секущую плоскость. Для построения сечения в плоскости $\triangle DSB$ проведем прямую EO_1 и точку ее пересечения с ребром DS обозначим F. В плоскости $\triangle ASC$ через точку O_1 проведем прямую, параллельную AC, и точки пересечения ее с ребрами AS и CS обозначим через P и Q ($PQ \parallel AC \parallel MN$). Прямая PQ лежит в секущей плоскости. Соединяя последовательно точки M, P, F, Q и N, получим многоугольник $MPFQN$ — сечение пирамиды. Далее, PM; O_1E и QN — средние линии соответственно треугольников ASB, SOB и SBC, поэтому $PM \parallel O_1E \parallel QN \parallel BS$ и $PM = O_1E = QN = \frac{1}{2} a$. Легко установить, что $O_1E \perp MN$ ($OB \perp MN$, следова-

тельно, и $O_1E \perp MN$). Тогда $MPQN$ — прямоугольник, а PFQ — равнобедренный треугольник и площадь сечения

$$S_{\text{сеч}} = MN \cdot O_1E + \frac{1}{2} PQ \cdot O_1F = MN\left(O_1E + \frac{1}{2} O_1F\right).$$

Из ΔABC находим, что $MN = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, как средняя линия треугольника.

Как было показано ранее $O_1E = \frac{1}{2} a$.

Рассмотрим подобные треугольники DSB и DFE ($FE \parallel SB$). Из подобия этих треугольников получаем

$$\frac{FE}{SB} = \frac{DE}{DB} = \frac{3}{4}, \quad (OE = BE),$$

откуда

$$FE = \frac{3}{4} SB = \frac{3}{4} a.$$

В таком случае

$$FO_1 = FE - EO_1 = \frac{3}{4} a - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}.$$

Подставляя найденные значения MN, EO_1 и O_1F в формулу площади сечения, найдем:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2 \cdot 4}\right) = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16}.$$

Ответ: $S_{\text{сеч}} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16} \approx 0{,}44194a^2$; при $a = 13{,}27$ *см* $S_{\text{сеч}} \approx$ $\approx 77{,}822$ *см*^{2}.

Задача 2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре — в плоскости ее основания. Определить ребро куба, если в пирамиде сторона основания равна a и высота равна h.

Решение. На рис. 247 изображена пирамида $SABCD$ с вписанным в нее кубом $MNPQM_1N_1P_1Q_1$, четыре вершины которого лежат на боковых ребрах пирамиды, а остальные в плоскости основания. Обозначим ребро куба через x, т. е. положим, что $MN = MM_1 = x$. Рассмотрим подобные треугольники SO_1B и SON ($ON \parallel O_1B$). Из подобия этих треугольников находим:

$$\frac{SO}{SO_1} = \frac{ON}{O_1B}.$$

Учитывая, что $SO_1 = h$, $SO = h - x$, $ON = \frac{x}{\sqrt{2}}$ и $O_1B = \frac{a}{\sqrt{2}}$, получаем:

$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a},$$

откуда

$$x = \frac{ah}{a+h}.$$

Ответ: $MN = x = \frac{ah}{a+h}$.

Задача 3. Основанием пирамиды служит квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды, если сторона основания равна 20 *дм*, а высота равна 21 *дм*.

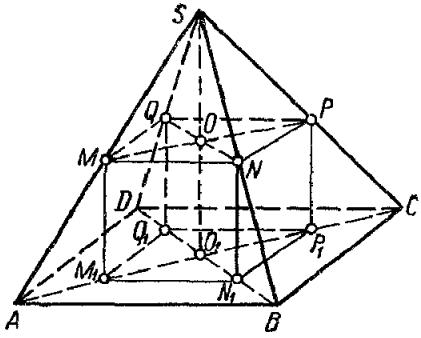


Рис. 247.

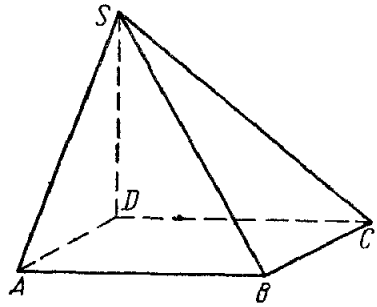


Рис. 248.

Решение. Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит квадрат $ABCD$ со стороной 20 *дм*, а высота пирамиды $SD = 21$ *дм* (рис. 248). Определить боковую поверхность пирамиды.

Боковая поверхность пирамиды равна сумме площадей боковых граней:

$$S_{\text{бок}} = S_{ASD} + S_{DSC} + S_{CSB} + S_{BSA}.$$

Треугольники ADS и CDS — прямоугольные и равные, и их площади:

$$S_{ASD} = S_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 \text{ дм}^2.$$

Из этих треугольников по теореме Пифагора находим:

$$AS = SC = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29 \text{ дм}.$$

Так как по теореме о трех перпендикулярах

$$SC \perp CB \text{ и } SA \perp AB \,(DC \perp CB \text{ и } DA \perp AB),$$

то треугольники SAB и SCB прямоугольные и равные, и их площади:

$$S_{ASB} = S_{CSB} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 29 = 290 \text{ } дм^2.$$

Тогда

$$S_{бок} = 2\,(290 + 210) = 1000 \text{ } дм^2.$$

Ответ: $1000 \text{ } дм^2 = 10 \text{ } м^2$.

Задача 4. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 8 *см*, а плоский угол при вершине равен 45°. Определить полную поверхность пирамиды.

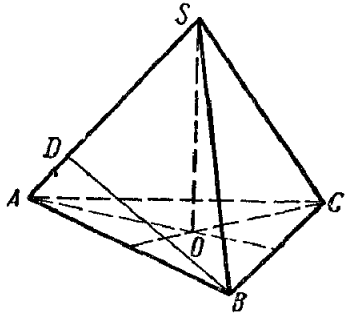


Рис. 249.

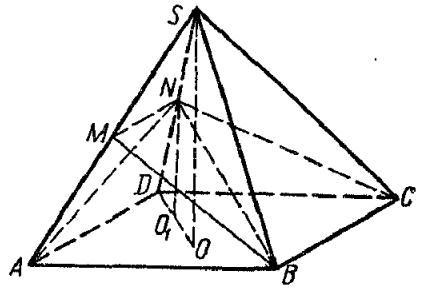


Рис. 250.

Решение. Дана пирамида $SABC$, в которой $SA = SB = SC = 8$ *см* и $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 45°$ (рис. 249). Найти полную поверхность.

Треугольники ASB, BSC и CSA — равны между собой, тогда $\triangle ABC$ равносторонний и полная поверхность пирамиды

$$S_{полн} = 3S_{ASB} + S_{ABC}.$$

Проведем $BD \perp AS$. Тогда $\triangle BDS$ — прямоугольный и равнобедренный ($\angle BDS = 90°$; $\angle DSB = 45°$), следовательно,

$$BD = DS = 4\sqrt{2} \text{ } см,$$

$$S_{ASB} = \frac{1}{2} AS \cdot BD = 16\sqrt{2} \text{ } см,$$

$$AD = AS - DS = 8 - 4\sqrt{2} = 4\,(2 - \sqrt{2}) \text{ } см.$$

Из $\triangle ABD$ получим:

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{(8 - 4\sqrt{2})^2 + 32} = \sqrt{64(2 - \sqrt{2})} \text{ см.}$$

Поскольку $AB = BC = AC$, то

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}AB^2}{4} = \frac{64(2 - \sqrt{2})\sqrt{3}}{4} = 16(2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \text{ см.}$$

Ответ: $S_{полн} = 16(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \approx 84{,}116 \text{ см}^2$.

Задача 5. В основании четырехугольной пирамиды лежит параллелограмм. Через одну из сторон этого параллелограмма и среднюю линию противолежащей грани проведена плоскость. Найти, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

Решение. Дана пирамида $SABCD$, у которой $ABCD$ — параллелограмм и MN — средняя линия грани SAD (рис. 250). Найти отношение V_{SBMNC} и V_{ABCDMN}. Пусть объем данной пирамиды $SABCD$ равен V. Рассмотрим пирамиды $SABCD$ и $NABCD$, у которых основание $ABCD$ общее, а высоты SO и NO_1 удовлетворяют соотношению

$$NO_1 = \frac{1}{2} SO \left(\triangle SOD \sim \triangle NO_1D \text{ и } SN = \frac{1}{2} SD \right).$$

Тогда объем

$$V_{NABCD} = \frac{1}{2} V.$$

Плоскость треугольника SBD делит объем данной пирамиды на две равные части, т. е.

$$V_{SABD} = \frac{1}{2} V,$$

так как у пирамид $SABD$ и $SBCD$ высота общая, а площади оснований равны.

Прямая AN, как медиана $\triangle ADS$, делит площадь грани ADS на две равновеликие части, тогда

$$V_{BAND} = V_{BANS} = \frac{1}{4} V.$$

Прямая NM (медиана $\triangle ANS$) делит $\triangle ANS$ на две равновеликие части, поэтому

$$V_{BANM} = \frac{1}{2} V_{BANS} = \frac{1}{8} V.$$

В таком случае объем V_1 части $ABCDMN$ пирамиды $V_1 = V_{ABCDMN} = V_{NABCD} + V_{BANM} = \frac{1}{2}V + \frac{1}{8}V = \frac{5}{8}V$, а объем V_2 оставшейся части

$$V_2 = V_{SBCNM} = V - \frac{5}{8}V = \frac{3}{8}V,$$

и искомое отношение

$$V_{SBCNM} : V_{ABCDMN} = \frac{3}{8}V : \frac{5}{8}V = 3 : 5.$$

Ответ: $V_2 : V_1 = 3 : 5$.

Задача 6. Доказать, что если в двух пирамидах, имеющих по равному двугранному углу при основаиии, равны также и ребра этих углов, то отношение объемов данных пирамид равно отношению произведений площадей граней, образующих равные двугранные углы.

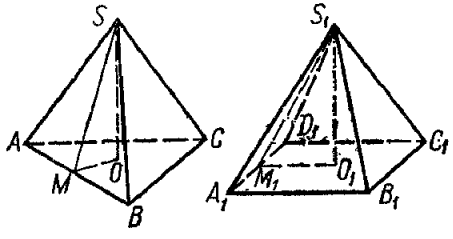


Рис. 251.

Решение. Пусть даны две пирамиды $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1D_1$, у которых двугранные углы $SABC$ и $S_1A_1D_1C_1B_1$ равны, причем $AB = A_1D_1$ (рис. 251). Доказать, что

$$V_{SABC} : V_{S_1A_1B_1C_1D_1} = (S_{SAB} \cdot S_{ABC}) : (S_{S_1A_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}).$$

Построим линейные углы SMO и $S_1M_1O_1$ данных равных двугранных углов. По условию $\angle SMO = \angle S_1M_1O_1$. Тогда прямоугольные треугольники MSO и $M_1S_1O_1$ подобны и

$$\frac{SO}{S_1O_1} = \frac{SM}{S_1M_1}.$$

Площади боковых граней SAB и $S_1A_1D_1$ будут относиться как их высоты, так как $AB = A_1D_1$, т. е.

$$\frac{S_{ASB}}{S_{A_1S_1D_1}} = \frac{SM}{S_1M_1} = \frac{SO}{S_1O_1}.$$

Найдем отношение объемов данных пирамид:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1B_1C_1D_1}} = \frac{\frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC}}{\frac{1}{3}S_1O_1 \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{ASB} \cdot S_{ABC}}{S_{A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}},$$

таким образом,

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{ASB} \cdot S_{ABC}}{S_{A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}},$$

что и требовалось доказать.

Мы привели доказательство для треугольной и четырехугольной пирамид. Легко видеть, что многоугольность пирамид на результат доказательства не влияет.

Если ребра равных двугранных углов в рассматриваемых пирамидах не равны между собой, то отношение объемов этих пирамид будет прямо пропорционально произведениям площадей граней, образующих эти углы, и обратно пропорционально длинам их ребер (рис. 251), т. е.

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{ASB} \cdot S_{ABC}}{S_{A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}} \cdot \frac{A_1D_1}{AB}.$$

§ 49. Усеченная пирамида

Усеченной пирамидой $ABCDA_1B_1C_1D_1$ называется часть пирамиды $SABCD$, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 252).

Основаниями усеченной пирамиды называются параллельные грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ — нижнее основание, а $A_1B_1C_1D_1$ — верхнее основание). *Высотой* усеченной пирамиды называется отрезок прямой, перпендикулярный к ее основаниям и заключенный между их плоскостями. Усеченная пирамида называется *правильной*, если ее основания правильные многоугольники и прямая, соединяющая центры оснований, перпендикулярна к плоскости оснований. *Апофемой* правильной усеченной пирамиды называют высоту ее боковой грани.

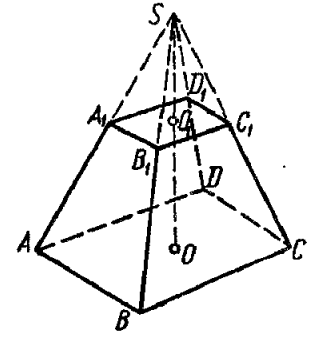


Рис. 252.

1. Поверхность усеченной пирамиды. Боковой поверхностью усеченной пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Полная поверхность усеченной пирамиды равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему

$$S_{\text{бок}} = \frac{P + P_1}{2} \cdot m,$$

где P и P_1 — периметры оснований, m — апофема усеченной пирамиды.

2. Объем усеченной пирамиды. *Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех пирамид*, имеющих высоту, одинаковую с высотой усеченной пирамиды, а *основания*: одна — нижнее основание данной пирамиды, другая — верхнее основание, а третья — основание, площадь которого равна среднему геометрическому площадей верхнего и нижнего оснований.

Пусть площади оснований усеченной пирамиды равны B и b, а высота равна h, тогда объем

$$V = \frac{h}{3}(F + f + \sqrt{fF}).$$

Задача 1. Если в усеченной пирамиде площади оснований равны S_1 и S_2, то площадь S_x сечения ее плоскостью, делящей боковые ребра пополам, равна $\frac{1}{4}(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. Доказать.

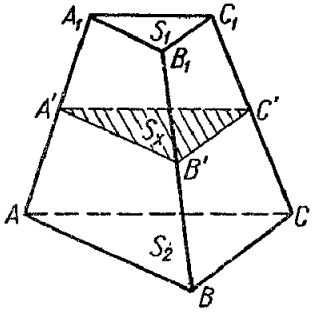


Рис. 253.

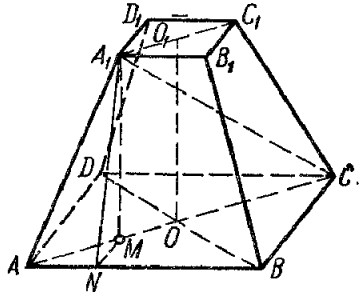


Рис. 254.

Решение. В усеченной пирамиде AC_1 площади оснований $f = S_{A_1B_1C_1} = S_1$ и $F = S_{ABC} = S_2$ и плоскость $A'B'C'$ делит боковые ребра пирамиды пополам, а значит, параллельна плоскостям оснований (рис. 253). Найти площадь $S_{A'B'C'} = S_x$.

Площади параллельных сечений пирамиды относятся как квадраты сходственных сторон. Обозначив $A_1B_1 = a_1$; $AB = a_2$; $A'B' = a_x$, получим:

$$\frac{a_1^2}{S_1} = \frac{a_2^2}{S_2} = \frac{a_x^2}{S_x}$$

или

$$\frac{a_1}{\sqrt{S_1}} = \frac{a_2}{\sqrt{S_2}} = \frac{a_x}{\sqrt{S_x}},$$

откуда

$$\frac{\frac{a_1 + a_2}{2}}{\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2}} = \frac{a_x}{\sqrt{S_x}}.$$

По свойству средней линии трапеции имеем

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = a_x,$$

тогда

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2} = \sqrt{S_x}$$

или

$$S_x = \frac{1}{4}(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 5 *дм* и 11 *дм*, а диагональ пирамиды — 12 *дм*. Определить боковую поверхность.

Решение. В усеченной пирамиде AC_1 имеем $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = 5$ *дм*; $AB = BC = CD = DA = 11$ *дм* и $A_1C = 12$ *дм*. Найти боковую поверхность (рис. 254).

Из вершины A_1 проведем $A_1N \perp AB$ и $A_1M \perp AC$, тогда A_1N — апофема пирамиды.

Боковая поверхность

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P + P_1) \cdot A_1N,$$

где $P = 4AB = 44$ *дм*, а $P_1 = 4A_1B_1 = 20$ *дм*.

Из квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ по их сторонам определяем диагонали

$$AC = 11\sqrt{2}\ дм, \quad A_1C_1 = 5\sqrt{2}\ дм.$$

Рассматривая равнобочную трапецию AA_1C_1C, находим:

$$AM = \frac{AC - A_1C_1}{2} = 3\sqrt{2}\ дм$$

и соответственно

$$MC = \frac{AC + A_1C_1}{2} = 8\sqrt{2}\ дм.$$

Тогда из прямоугольного треугольника A_1MC находим высоту пирамиды

$$O_1O = A_1M = \sqrt{A_1C^2 - MC^2} = \sqrt{12^2 - (8\sqrt{2})^2} = 4\ дм.$$

Из равнобедренного прямоугольного треугольника AMN ($\angle ANM = 90°$), гипотенуза которого $AM = 3\sqrt{2}\ дм$, находим сторону

$$MN = \frac{AM}{\sqrt{2}} = 3\ дм.$$

Апофему данной пирамиды вычислим, рассматривая прямоугольный треугольник A_1NM ($\angle A_1MN = 90°$)

$$A_1N = \sqrt{A_1M^2 + MN^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ дм.$$

Подставляя найденные значения P, P_1 и A_1N в формулу боковой поверхности пирамиды, получим:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(44 + 20) \cdot 5 = 160\ дм^2.$$

Ответ: $S_{бок} = 160\ дм^2 = 1{,}6\ м^2$.

Задача 3. Определить объем правильной треугольной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований 30 $м$ и 20 $м$, а боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

Решение. В правильной треугольной усеченной пирамиде $AB = 30\ м$, $A_1B_1 = 20\ м$ и $S_{бок} = S_{ABC} + S_{A_1B_1C_1}$ (рис. 255). Найти ее объем.

Обозначим стороны оснований $AB = a = 30\ м$, $A_1B_1 = a_1 = 20\ м$ и апофему пирамиды $MN = m$, тогда согласно условию имеем:

$$\frac{1}{2}(3a + 3a_1)\, m = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4}$$

или

$$MN = m = \frac{\sqrt{3}(a^2 + a_1^2)}{6(a + a_1)} = \frac{\sqrt{3}(30^2 + 20^2)}{6(30 + 20)} = \frac{13\sqrt{3}}{3}\ м.$$

Рассматривая равносторонние $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, центры которых находятся в точках O и O_1, найдем ON и O_1M как радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники:

$$ON = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 5\sqrt{3}\ м; \quad O_1M = \frac{a_1\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ м.$$

Из прямоугольной трапеции O_1MNO ($MK \perp ON$) находим:

$$KN = ON - OK = ON - O_1M$$

или

$$KN = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ м.$$

Рассматривая прямоугольный треугольник MKN, находим высоту данной пирамиды:

$$h = MK = \sqrt{MN^2 - NK^2} = \sqrt{\left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 4\sqrt{3}\ м.$$

Тогда объем данной пирамиды:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 4} h\,(a^2 + a_1^2 + aa_1) = 1900\ м^3.$$

Ответ: $V = 1900\ м^3$.

Задача 4. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b; диагональ пирамиды образует с плоскостью основания угол в 30°. Найти объем этой пирамиды.

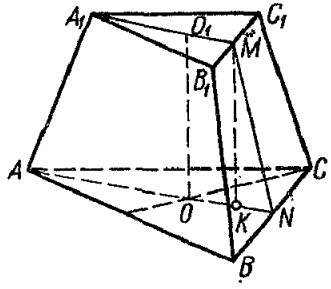


Рис. 255.

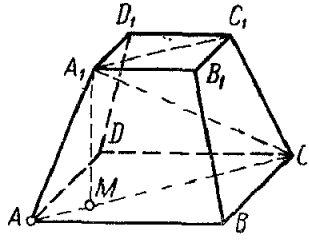


Рис. 256.

Решение. В пирамиде AC_1 $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = b$, $AB = BC = CD = DA = a$, $\angle A_1CM = 30°$, $A_1M \perp AC$ (рис. 256). Найти объем пирамиды.

Находим диагональ квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$:

$$AC = a\sqrt{2} \text{ и } A_1C_1 = b\sqrt{2}.$$

Рассматривая равнобочную трапецию AA_1C_1C, определяем:

$$MC = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b).$$

В прямоугольном треугольнике A_1MC ($\angle A_1MC = 90°$) $\angle A_1CM = 30°$, поэтому

$$A_1C = 2A_1M.$$

Из этого треугольника по теореме Пифагора находим:

$$A_1C^2 - A_1M^2 = MC^2$$

или

$$3A_1M^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2,$$

откуда

$$A_1M = \frac{a+b}{\sqrt{6}}.$$

Тогда объем данной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{6}}(a^2 + b^2 + ab).$$

Ответ: $V = \frac{\sqrt{6}}{18}(a+b)(a^2 + ab + b^2)$ *куб. ед.*

§ 50. Клин. Обелиск

Клином называется пятигранник, основание которого — прямоугольник, *боковые грани* — равнобедренные треугольники и равнобедренные трапеции (рис. 257).

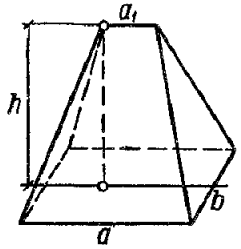


Рис. 257.

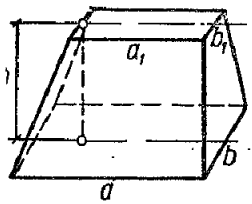


Рис. 258.

Поверхность и объем клина могут быть вычислены соответственно по формулам:

$$S = ab + \frac{b\sqrt{4h^2 + (a-a_1)^2} + (a+a_1)\sqrt{4h^2 + b^2}}{2},$$

$$V = \frac{1}{6}(2a + a_1)bh.$$

Обелиском называется шестигранник, основания которого — прямоугольники, расположенные в параллельных плоскостях, а противоположные боковые грани одинаково наклонены к основанию. Продолжения ребер не пересекаются в одной точке, так что обелиск не является усеченной четырехугольной пирамидой (рис. 258).

Поверхность и объем обелиска могут быть вычислены по формулам:

$$S = ab + a_1b_1 + \frac{(a + a_1)\sqrt{4h^2 + (a - a_1)^2} + (b + b_1)\sqrt{4h^2 + (b - b_1)^2}}{2},$$

$$V = \frac{h}{6}[ab + a_1b_1 + (a + a_1)(b + b_1)].$$

§ 51. Подобие многогранников

Два многогранника называются подобными, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобных многогранников называются *сходственными*.

У подобных многогранников:

а) двугранные углы равны и одинаково расположены;

б) сходственные ребра пропорциональны.

Кроме того, справедливы следующие теоремы:

1. Если в пирамиде проведем секущую плоскость параллельно основанию, то она отсечет от нее другую пирамиду, подобную данной.

2. Поверхности подобных многогранников относятся, как квадраты сходственных линейных элементов многогранников.

3. Объемы подобных многогранников относятся, как кубы сходственных линейных элементов этих многогранников.

4. Квадраты объемов подобных многогранников относятся, как кубы площадей сходственных граней.

Задача 1. Площади оснований усеченной пирамиды S_1 и S_2, а ее объем равен V. Определить объем полной пирамиды.

Решение. Пусть $S_1 > S_2$. Обозначим объем полной пирамиды через V_1, а объем пирамиды, дополняющей данную усеченную пирамиду до полной, через V_2. Тогда по теореме 4

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{S_2^3}{S_1^3}$$

или

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}.$$

Составляя производную пропорцию, получим

$$\frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}$$

и учитывая, что $V_1 - V_2 = V$, находим

$$\frac{V}{V_1} = \frac{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}},$$

откуда

$$V_1 = \frac{VS_1^{3/2}}{S_1^{3/2} - S_2^{3/2}}.$$

Ответ: $V_1 = \dfrac{V\sqrt{S_1^3}}{\sqrt{S_1^3} - \sqrt{S_2^3}}$ *кв. ед.*

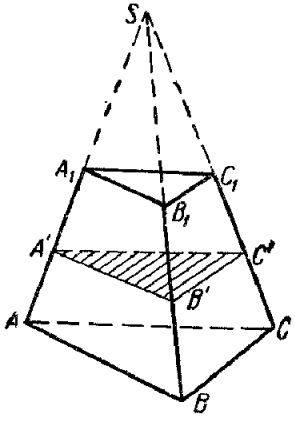


Рис. 259.

Задача 2. Площади оснований усеченной пирамиды равны a^2 и b^2. Найти площадь сечения, параллельного плоскостям оснований усеченной пирамиды и делящего ее объем пополам.

Решение. В усеченной пирамиде AC_1 (для простоты рисунка рассматривается треугольная пирамида) даны $S_{ABC} = a^2$; $S_{A_1B_1C_1} = b^2$ (рис. 259). Требуется найти площадь сечения $A'B'C'$ (пл. $ABC \parallel$ пл. $A'B'C'$), которое делит усеченную пирамиду на равновеликие по объему части.

Дополним усеченную пирамиду до полной. По теореме 1 пирамиды $SABC$, $SA'B'C'$; $SA_1B_1C_1$ — подобны.

Обозначим площадь искомого сечения $S_{A'B'C'}$ через x^2, а объемы пирамид $SABC$, $SA'B'C'$ и $SA_1B_1C_1$ соответственно V_a, V_x, V_b, тогда по теореме 4

$$\frac{V_a^2}{a^6} = \frac{V_x^2}{x^6} = \frac{V_b^2}{b^6}$$

или

$$\frac{V_a}{a^3} = \frac{V_x}{x^3} = \frac{V_b}{b^3} = t,$$

где t — некоторое число, обозначающее величину этих отношений.

Тогда

$$V_a = a^3t, \quad V_x = x^3t, \quad V_b = b^3t.$$

По условию задачи $V_a - V_x = V_x - V_b$
или $a^3t - x^3t = x^3t - b^3t$, откуда

$$2x^3 = a^3 + b^3,$$

и, следовательно,

$$x^2 = \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^{2/3}$$

Ответ: $S_{A'B'C'} = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^2}$ *кв. ед.*

§ 52. Правильные многогранники

Формула Эйлера. Для любых выпуклых многогранников существует некоторое постоянное соотношение между числом вершин, граней и ребер, которое было установлено Леонардом Эйлером (1707—1783).

Сумма чисел граней и вершин выпуклого многогранника на два больше числа его ребер:

$$В + Г = Р + 2,$$

где В — число вершин, Г — число граней, Р — число ребер многогранника.

Правильные многогранники. *Многогранник называется правильным*, если все его грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны.

Правильные многогранники имеют правильную сетку, т. е. все их грани имеют одинаковое количество сторон, а из каждой вершины выходит одинаковое количество ребер. Доказано, что существует только пять правильных сеток, следовательно, и пять правильных выпуклых многогранников, которые называются также телами Платона.

а) *Тетраэдр* (правильный четырехгранник), гранями которого являются правильные треугольники (рис. 260). Тетраэдр имеет 4 грани, 6 ребер и 4 вершины, в каждой из которых сходится по 3 ребра.

б) *Гексаэдр* (правильный шестигранник — куб), гранями которого являются правильные четырехугольники — квадраты (рис. 261). Гек-

саэдр имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин, в каждой из которых сходится по 3 ребра.

в) *Октаэдр* (правильный восьмигранник), гранями которого являются правильные треугольники (рис. 262). Октаэдр имеет 8 граней, 12 ребер и 6 вершин, в каждой из которых сходится по 4 ребра.

г) *Додекаэдр* (правильный двенадцатигранник), гранями которого служат правильные пятиугольники (рис. 263). Додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 20 вершин, в каждой из которых сходится по 3 ребра.

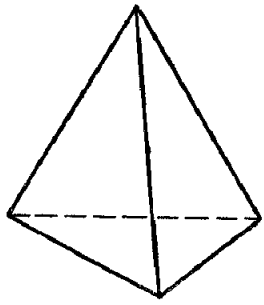


Рис. 260.

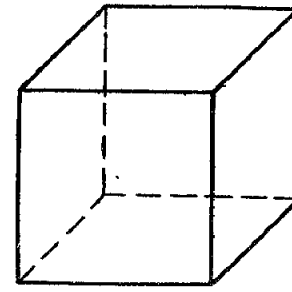


Рис. 261.

д) *Икосаэдр* (правильный двадцатигранник), гранями которого служат правильные треугольники (рис. 264). Икосаэдр имеет 20 граней, 30 ребер и 12 вершин, в каждой из которых сходится по 5 ребер.

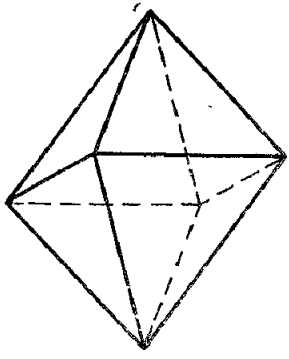


Рис. 262.

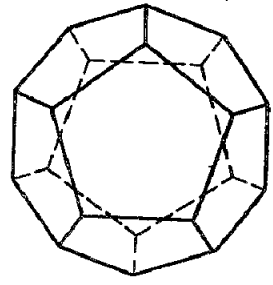


Рис. 263.

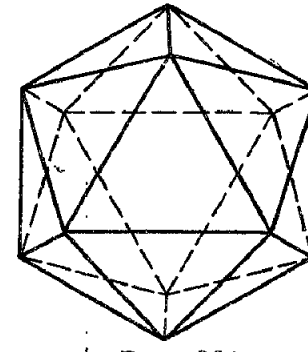


Рис. 264.

Названия всех тел Платона происходят от греческих слов ἕδρα — грань, основа, база и соответствующего числительного: τετράζ — четыре, ἕξ — шесть, ὀκτώ — восемь, δώδεκα — двенадцать, εἴκοσι — двадцать.

Тела Платона нашли широкое применение в кристаллографии, так как многие кристаллы имеют форму правильных многогранников. Например, поваренная соль имеет кристаллы кубической системы в виде гексаэдров, алмаз чаще всего кристаллизуется в виде октаэдров и т. д.

Для тел Платона, как для частного случая выпуклых многогранников, справедлива формула Эйлера, например, для тетраэдра

$$\text{В} + \text{Г} = \text{Р} + 2 = 8.$$

Кроме правильных выпуклых многогранников существуют еще и невыпуклые (звездчатые) правильные многогранники, которые получили общее название тел Пуансо, но на которых мы более подробно не имеем возможности здесь остановиться.

Сводная таблица правильных многогранников.

Введенные обозначения: a — ребро многогранника, $N_1 = \text{Г}$ — количество граней, N_2 — количество ребер (сторон) у каждой грани, N_3 — количество ребер у каждой вершины, $N_4 = \text{В}$ — количество вершин, $N_5 = \text{Р}$ — общее количество ребер, S — площадь поверхности, V — объем, R — радиус описанного шара, r — радиус вписанного шара.

Таблица 4

Наименование многогранника	Свойства многогранника и соотношения между его элементами
Тетраэдр (правильный четырехгранник)	$N_1 = 4,\ N_2 = 3,\ N_3 = 3,\ N_4 = 4,\ N_5 = 6;$ $S = a^2\sqrt{3} \approx 1{,}7321a^2;\ V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \approx 0{,}1179a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{6}}{4} \approx 0{,}6124a;\ r = \frac{a\sqrt{6}}{12} \approx 0{,}2041a$
Гексаэдр (правильный шестигранник — куб)	$N_1 = 6,\ N_2 = 4,\ N_3 = 3,\ N_4 = 8,\ N_5 = 12;$ $S = 6a^2;\ V = a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660a;\ r = \frac{1}{2}a = 0{,}5a$
Октаэдр (правильный восьмигранник)	$N_1 = 8,\ N_2 = 3,\ N_3 = 4,\ N_4 = 6,\ N_5 = 12;$ $S = 2a^2\sqrt{3} \approx 3{,}4641a^2;\ V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}4714a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071a;\quad r = \frac{a\sqrt{6}}{6} \approx 0{,}4082a$

Продолжение табл. 4

Наименование многогранника	Свойства многогранника и соотношения между его элементами
Додекаэдр (правильный двенадцатигранник)	$N_1 = 12, \quad N_2 = 5, \quad N_3 = 3, \quad N_4 = 20, \quad N_5 = 30;$ $S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \approx 20{,}6457a^2;$ $V = \frac{1}{4}a^3(15 + 7\sqrt{5}) \approx 7{,}6631a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4} \approx 1{,}4013a;$ $r = \frac{a\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20} \approx 1{,}1135a$
Икосаэдр (правильный двадцатигранник)	$N_1 = 20, \quad N_2 = 3, \quad N_3 = 5, \quad N_4 = 12, \quad N_5 = 30;$ $S = 5a^2\sqrt{3} \approx 8{,}6603a^2; \quad V = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}) \approx 2{,}1817a^3;$ $R = \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \approx 0{,}9511a; \quad r = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12} \approx 0{,}7558a$

§ 53. Построение плоских сечений многогранников

Правильное построение сечений многогранников плоскостями играет большую роль как в развитии пространственных представлений, так и в предупреждении ошибок, часто встречающихся при решении многих стереометрических задач на вычисления и доказательства.

Построить сечение многогранника плоскостью — это значит построить прямые, являющиеся следами пересечения граней многогранника данной плоскостью. При этом секущая плоскость может быть задана различными способами, например:

а) тремя точками, которые не лежат на одной прямой;

б) прямой и точкой, не лежащей на ней;

в) двумя непересекающимися прямыми;

г) некоторыми из указанных выше геометрических элементов в совокупности с различными зависимостями между ними и элементами (гранями, ребрами, диагоналями и т. д.) многогранника.

При этом могут быть использованы параллельность, перпендикулярность, задание величин двугранных углов и углов между секущей плоскостью и ребрами многогранника и т. д.

На рис. 265 показан пример неправильного построения сечения куба AC_1 плоскостью, проходящей через три заданные точки N, C,

D_1, который хорошо иллюстрирует, как легко допустить ошибку при построениях в пространстве.

Правильное построение подобного сечения выполнено на рис. 266 в задаче 1 этого параграфа.

Построение плоских сечений многогранников выполняется на основе соответствующих пространственных аксиом и теорем.

Для фактического построения сечений многогранников плоскостью применяются два способа:

1) способ соответствия,

2) способ построения следов.

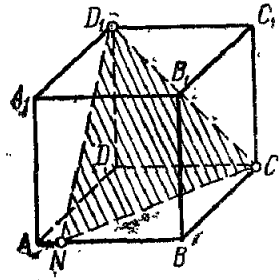


Рис. 265.

Способ соответствия состоит в том, что для построения сечения первоначально строятся те точки нижнего основания многогранника, которые взаимно однозначно соответствуют точкам искомого сечения.

Способ следов состоит в том, что на плоскости нижнего основания многогранника (иногда на какой-либо другой плоскости) выполняется построение следов (линий и точек пересечения секущей плоскости, некоторых прямых). С помощью этих следов легко выполняется построение точек пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и линий пересечения секущей плоскости с гранями многогранника. Рассмотрим несколько задач.

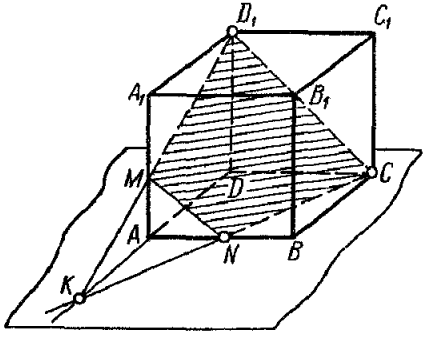


Рис. 266.

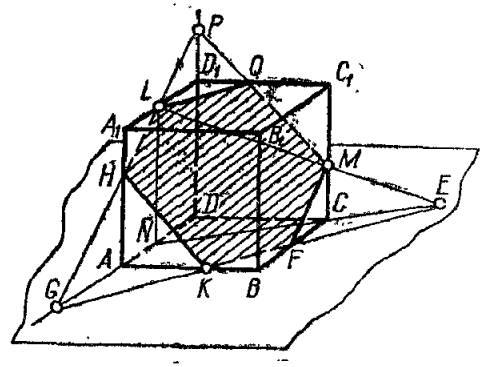


Рис. 267.

Задача 1. Построить сечение куба AC_1 плоскостью, проходящей через три заданные точки N, C, D_1 (рис. 266).

Построение. Следы сечения на гранях $ABCD$ и CC_1D_1D получаем, соединяя точки N и C; C и D_1. Для построения следов в гранях ABB_1A_1 и ADD_1A_1 поступаем следующим образом.

Продолжим прямые CN и DA до их пересечения в точке K.

Точка K лежит на продолжении ребра AD, а следовательно, и в грани ADD_1A_1. Соединим точки K и D_1. Прямая KD_1 обязательно пересекается с ребром AA_1, также лежащим в грани ADD_1A_1. Полученную при пересечении прямых AA_1 и KD_1 точку M соединим с точками N и D_1. NCD_1M — искомое сечение (рис. 266).

Сравните это сечение с неправильно построенным сечением NCD_1 на рис. 265.

Задача 2. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через три заданные точки K, L, M, лежащие на непересекающихся ребрах (рис. 267).

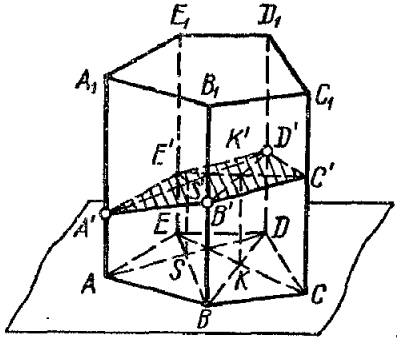


Рис. 268.

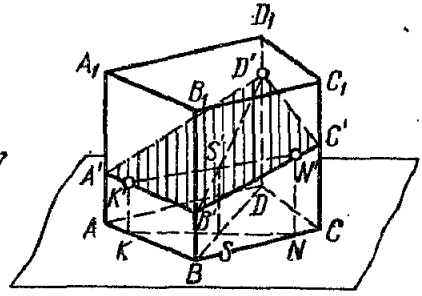


Рис. 269.

Построение. Опустим из заданной точки L перпендикуляр LN на ребро AD. Проведем прямые LM и NC до их пересечения в точке E (обе эти прямые лежат в одной плоскости, определяемой тремя точками L, M, N, и не параллельны, следовательно, обязательно пересекутся в некоторой точке E).

Проведем прямую EK до пересечения с прямыми BC и AD соответственно в точках F и G. Проведем прямую GL до пересечения с прямыми AA_1 и DD_1 в точках H и P. Точку P соединим с заданной точкой M и на пересечении PM с ребром D_1C_1 получаем точку Q. Точки L, Q, M, F, K, H последовательно соединяем. Фигура $LQMFKH$ — искомое сечение.

Задача 3. Построить сечение пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки A', B', D', заданные на ее ребрах AA_1, BB_1, DD_1 (рис. 268).

Построение. В плоскости AA_1D_1D проводим прямые AD и $A'D'$. Соединяем точки B и E прямой. Из точки S в плоскости AA_1D_1D восстановим перпендикуляр к основанию призмы до пересечения его с прямой $A'D'$ в точке S'. Проводим через точки B' и S' прямую, которая пересечет ребро EE_1 в точке E'. Соединяем прямыми точку E' с точками A' и D'.

Проведем в основании призмы диагонали EC и BD, которые пересекутся в точке K. Соединим точки B' и D' прямой. В плоскости BB_1D_1D из точки K восстановим перпендикуляр к основанию призмы до пересечения его с прямой $B'D'$ в точке K'. Проводим через точки E' и K' прямую, пересекающуюся с ребром CC_1 в точке C'. Соединяем точку C' с точками D' и B' прямыми. Сечение $A'B'C'D'E'$ является искомым.

Задача 4. Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, которая проходит через точки K' и N', данные на гранях призмы, и точку D', данную на ее ребре (рис. 269).

Построение. Из заданных точек K' и N' в плоскостях граней AA_1B_1B и BB_1C_1C опускаем перпендикуляры до их пересечения с ребрами AB и BC соответственно в точках K и N. Соединяем попарно точки K' и N', K и N, B и D. Из точки S, в которой пересекаются прямые KN и BD, лежащие в одной и той же плоскости (плоскости основания призмы), восстанавливаем перпендикуляр к этой плоскости до его пересечения с линией $K'N'$. Через полученную точку S' проводим прямую $D'S'$ до ее пересечения с ребром BB_1 в точке B'.

Проведя теперь через заданные точки K' и N' отрезки $B'K'$ и $B'N'$ и продолжив их до пересечения с ребрами AA_1 и CC_1, получаем точки A' и C'.

Четырехугольник $A'B'C'D'$ является искомым сечением.

Докажите, что в данном построении каждая рассмотренная пара прямых лежит в одной плоскости, т. е. что ни одна из рассмотренных пар прямых не была скрещивающейся. Например, для полного обоснования выполненного построения надо доказать, что прямая SS' одновременно лежит и в плоскости BB_1D_1D и в плоскости $KK'N'N$, так как в противном случае прямые SS' и $K'N'$ не будут пересекаться, а будут являться скрещивающимися прямыми.

Проведите такую же проверку и для всех остальных задач этого параграфа.

Задача 5. Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, которая проходит через три заданные точки F, M, N, лежащие на трех ее разных боковых гранях (рис. 270).

Построение. Проводим через точки M, N, F прямые MM', NN', FF', параллельные ребрам призмы. Находим на плоскости основания призмы $ABCD$ следы прямых MN и MF. Следом прямой NM будет точка Q, следом прямой FM — точка R. В таком случае прямая QR будет являться следом плоскости искомого сечения на плоскости основания. Продолжим отрезок DC до его пересечения с продолжением QR в точке T. Проводим через точки T и F прямую, которая пересечет ребро DD_1 в точке G, а ребро CC_1 в точке H. Проведем через точки M и H прямую, которая пересечет ребро BB_1 в точке L. Проведем через точки L и N прямую,

которая пересечет ребро AA_1 в точке P. Соединим прямой точки P и G. Сечение $PGFHMLN$ является искомым.

Задача 6. Даны точки M и N, лежащие на боковых гранях четырехугольной пирамиды, и точка P — на ее боковом ребре. Построить сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через эти три точки (рис. 271).

Построение. Находим на плоскости основания пирамиды след прямой MN — точку H. Соединяем точку M с точкой P и находим точку G — след прямой MP на той же плоскости осиования. Проводим прямую HG — след плоскости искомого сечения. Продолжим прямую AB до ее пересечения с прямой HG и в результате

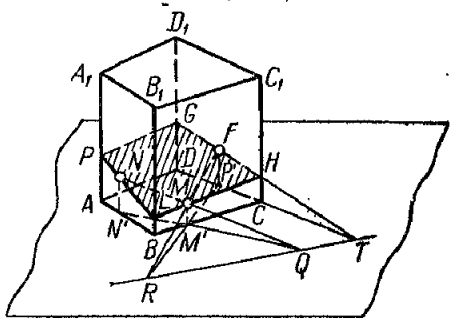


Рис. 270.

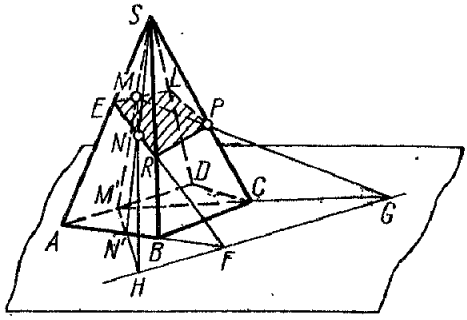


Рис. 271.

находим точку F, которая принадлежит плоскости сечения и грани SAB. Через точки F и N, лежащие в плоскости SAB, проводим прямую, которая пересечет ребро SB в точке R и ребро SA в точке E. Через точки E и M проводим прямую, которая пересечёт ребро SD в точке L. Полученное сечение $ERPL$ является искомым.

Упражнения.

1. Провести сечение правильной пятиугольной призмы плоскостью так, чтобы она проходила через ребро основания призмы и составляла с плоскостью ее основания угол α.

Исследовать все возможные случаи.

2. Провести сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через одну из вершин основания, перпендикулярно противоположному боковому ребру.

3. Построить сечение, проходящее через три данные точки, которые находятся на смежных боковых ребрах шестиугольной призмы.

4. Построить сечение, проходящее через три данные точки, которые расположены на смежных боковых гранях пятиугольной призмы.

5. Построить сечение, проходящее через три данные точки, одна из которых находится на основании, а две другие — на боковых гранях правильной треугольной пирамиды.

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

§ 54. Цилиндр

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой линии AB (рис. 272), сохраняющей одно и то же направление и пересекающей данную линию CD. Прямая AB называется *образующей*, а линия CD — *направляющей*.

Если в качестве направляющей цилиндрической поверхности взять окружность, плоскость которой перпендикулярна к образующей, то такая поверхность называется *круговой* цилиндрической поверхностью.

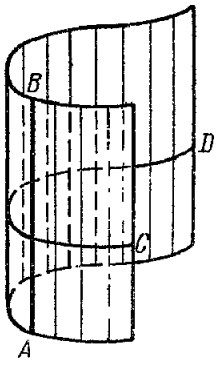


Рис. 272.

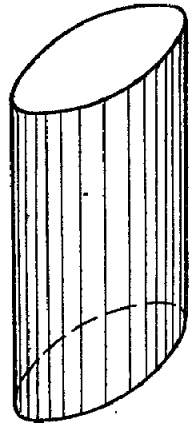


Рис. 273.

Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, пересекающими образующие (рис. 273).

Часть цилиндрической поверхности, заключенная между параллельными плоскостями, называется *боковой* поверхностью цилиндра, а части плоскостей, отсекаемые этой поверхностью,— *основаниями* цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называется *высотой* цилиндра.

Прямым круговым цилиндром называется тело, ограниченное круговой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными к образующей (рис. 274). Основаниями прямого кругового цилиндра являются *круги* радиуса R, а *высота* равна образующей цилиндра:

$$H = AB = OO_1.$$

В элементарной геометрии обыкновенно рассматривают только прямой круговой цилиндр, который в дальнейшем будем называть просто цилиндром.

Цилиндр можно также получить вращением прямоугольника AOO_1B вокруг одной из его сторон (рис. 274).

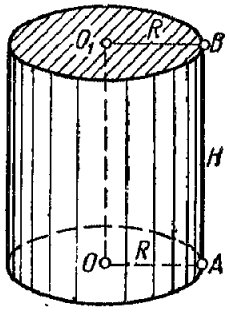


Рис. 274.

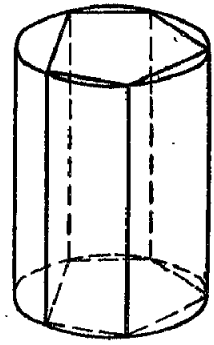


Рис. 275.

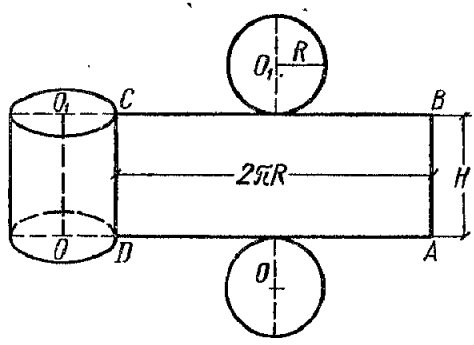


Рис. 276.

Сторона прямоугольника OO_1, вокруг которой происходит вращение, называется *осью* цилиндра, а перпендикулярная ей сторона $OA = R$ называется *радиусом* цилиндра. *Радиус цилиндра равен также радиусу его оснований.*

1. Боковая и полная поверхность цилиндра. В качестве боковой поверхности цилиндра принимают предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной (или описанной) в этот цилиндр правильной призмы, когда число боковых граней этой призмы неограниченно увеличивается, а длина основания каждой из ее граней стремится к нулю.

Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH,$$

где R — радиус основания цилиндра, а H его высота.

Полная поверхность цилиндра равна сумме боковой поверхности и площадей его оснований:

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R\,(H + R).$$

2. Развертка цилиндра. Если поверхность цилиндра разрезать по образующей и окружностям оснований и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность вместе с основаниями лежали в одной плоскости (рис. 276), то на этой плоскости получим фигуру, которая называется *разверткой* цилиндра. Развертка цилиндра состоит из прямоугольника $ABCD$, стороны которого $AB = H$ и $CB = 2\pi R$, и двух кругов (оснований цилиндра) O и O_1.

3. Объем цилиндра. В качестве величины *объема* цилиндра принимают предел, к которому стремятся объемы правильных вписанных (или описанных) в цилиндр призм при неограниченном увеличении числа их боковых граней.

Отметим, что если число граней правильной призмы увеличивается беспредельно, то длина основания каждой из них обязательно будет стремиться к нулю.

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = \pi R^2 H.$$

4. Усеченный цилиндр. *Усеченным цилиндром* называют часть цилиндра, которая отсекается от него плоскостью, не параллельной основанию и не пересекающей его (рис. 277). Боковая поверхность усеченного цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = \pi R\,(H_1 + H_2).$$

Полная поверхность:

$$S_{\text{полн}} = \pi R\left[R + H_1 + H_2 + \sqrt{R^2 + \left(\frac{H_2 - H_1}{2}\right)^2}\right].$$

Объем

$$V = \pi R^2 \frac{H_1 + H_2}{2},$$

где R — радиус основания цилиндра, H_1 и H_2 — наименьшая и наибольшая образующая усеченного цилиндра (рис. 277).

5. Отрезок цилиндра (цилиндрическая подковка). *Отрезком цилиндра*, или *цилиндрической подковкой*, называют часть цилиндра, отсекаемую плоскостью, пересекающей одно основание цилиндра и заключенную между этим основанием и секущей плоскостью (рис. 278).

Высотой отрезка цилиндра называют наибольшую из образующих $CD = H$; $AB = 2a$ прямое ребро, $CE = b$ — стрелка сегмента основания, α — центральный угол основания в радианах.

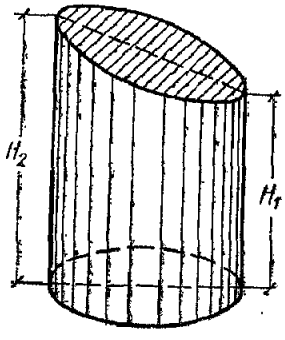


Рис. 277.

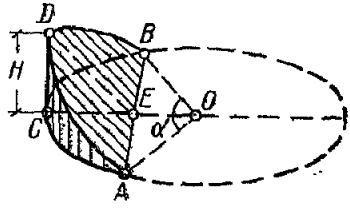


Рис. 278.

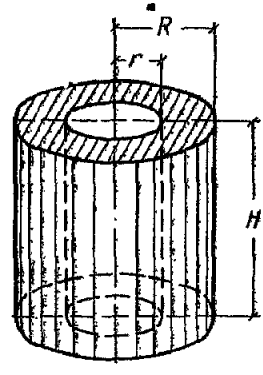


Рис. 279.

Боковая поверхность отрезка цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = \frac{RH}{b}[2a + (b - R)\alpha].$$

Объем:

$$V = \frac{H}{6b}[2a(3R^2 - a^2) + 3R^2(b - R)\alpha].$$

(Формулы справедливы и в случае $R < b \leqslant 2R$; $\pi < \alpha \leqslant 2\pi$).

6. Цилиндрическая труба (полый цилиндр). *Цилиндрической трубой* (полым цилиндром) называют тело, ограниченное двумя цилиндрическими круговыми поверхностями с общей осью и различными радиусами и двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными образующим (рис. 279).

R и r — внешний и внутренний радиусы; $\delta = (R - r)$ — толщина цилиндрической трубы, $\rho = \frac{R + r}{2}$ — средний радиус.

Боковая поверхность цилиндрической трубы

$$S_{\text{бок}} = 2\pi H(R + r).$$

Полная поверхность:

$$S_{\text{полн}} = 2\pi (R + r)(H + R - r) = 4\pi\rho (H + \delta)$$

и объем

$$V = \pi H (R^2 - r^2) = 2\pi H \rho \delta.$$

Задача 1. Высота цилиндра 6 *дм*, радиус основания 5 *дм*. Концы данного отрезка лежат на окружностях обоих оснований; длина его равна 10 *дм*. Найти его кратчайшее расстояние от оси.

Решение. В рассматриваемом цилиндре $AM = 6$ *дм*, $AO = 5$ *дм* и отрезок $MN = 10$ *дм* (рис. 280). Найти расстояние между отрезком MN и осью цилиндра OO_1.

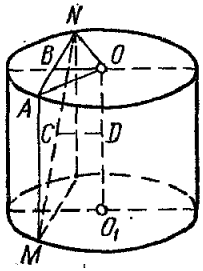


Рис. 280.

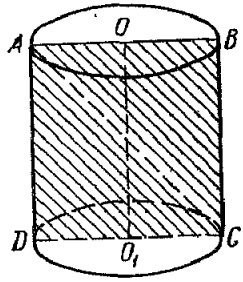


Рис. 281.

MN и OO_1 скрещивающиеся прямые. Проведем плоскость MAN через прямую MN параллельно оси OO_1, тогда расстояние от любой точки оси OO_1 до проведенной плоскости будет искомым.

Из прямоугольного треугольника MAN находим:

$$AN = \sqrt{MN^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ дм}.$$

Из прямоугольного треугольника ABO $\left(BO \perp AN;\ AB = \frac{AN}{2}\right)$:

$$OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ дм}.$$

В таком случае

$$CD = BO = 3 \text{ дм}.$$

Ответ: 3 *дм*.

Задача 2. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения равна S. Определить полную поверхность цилиндра.

Решение. В цилиндре $S_{\text{осн}} = Q$ и $S_{ABCD} = S$ (рис. 281). Найти $S_{\text{полн}}$ цилиндра.

Обозначим $AO = R$ и $AD = H$, тогда

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R\,(H + R).$$

По условию задачи

$$\begin{cases} 2RH = S, \\ \pi R^2 = Q, \end{cases}$$

откуда

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}, \qquad H = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}}.$$

Тогда

$$S_{\text{полн}} = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{\pi}}\left(\frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}} + \sqrt{\frac{Q}{\pi}}\right) = \pi S + 2Q.$$

Ответ: $\pi S + 2Q$.

Задача 3. Боковая поверхность цилиндра вдвое больше суммы площадей его оснований. Найти угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания цилиндра.

Решение. По условию $S_{\text{бок}} = 4S_{\text{осн}}$. Найти $\angle ACD = \alpha$ (рис. 281).

Известно, что $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$, а $S_{\text{осн}} = \pi R^2$,

тогда

$$2\pi RH = 4\pi R^2$$

и, следовательно,

$$H = 2R,$$

т. е. прямоугольный $\triangle ADC$ — равнобедренный, $AD = DC = 2R$. Искомый угол $\alpha = 45°$.

Ответ: 45°.

Задача 4. В правильную шестиугольную призму, боковая поверхность которой равна 24 $м^2$, вписан цилиндр, у которого диагональ осевого сечения наклонена к плоскости основания под углом в 60°. Найти объем цилиндра.

Решение. По условию задачи $S_{\text{бок. пр}} = 24\ м^2$, $\angle MPN = 60°$ рис. 282). Найти объем цилиндра. Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H,$$

где R — радиус основания, а H — высота цилиндра.

Из прямоугольного треугольника MNP находим

$$MP = 2NP = 4R \quad (\angle NMP = 30°).$$

Тогда

$$MN = H = \sqrt{(4R)^2 - (2R)^2} = 2R\sqrt{3}.$$

Рассмотрим равносторонний треугольник AOB, в котором высота $OE = R$, тогда сторона треугольника

$$AB = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Боковая поверхность призмы

$$S_{\text{бок пр}} = 6AB \cdot BD = 6AB \cdot MN =$$

$$= 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} R \cdot 2\sqrt{3}R = 24R^2.$$

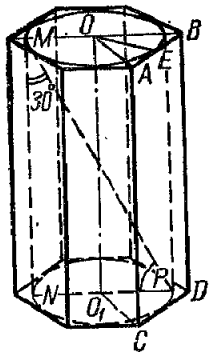


Рис. 282.

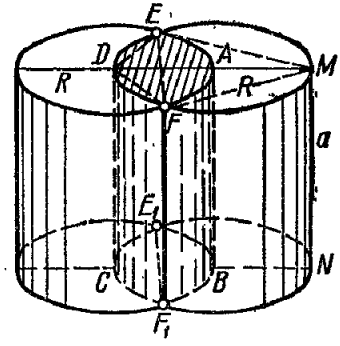


Рис. 283.

Следовательно, принимая во внимание условие задачи, имеем:

$$S_{\text{бок. пр}} = 24R^2 = 24, \text{ т. е. } R = 1 \text{ м}.$$

Тогда $H = 2\sqrt{3}$ м и объем цилиндра

$$V = \pi \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3} \text{ м}^3.$$

Ответ: $V = 2\pi\sqrt{3} \approx 10{,}883$ м^3.

Задача 5. Найти диагональ осевого сечения цилиндра, если объем цилиндра равен 240π дм^3, а боковая поверхность — 120π дм^2.

Решение. По условию $V_{\text{цил}} = 240\pi$ дм^3, а $S_{ABCD} = 120\pi$ дм^2 (рис. 281). Найти AC.

Обозначив $AO = R$ и $AD = H$, будем иметь два уравнения:

$$\begin{cases} \pi R^2 H = 240\pi, \\ 2\pi RH = 120\pi, \end{cases}$$

откуда $R = 4$ дм, а $H = 15$ дм.

Далее, из прямоугольного треугольника ADC находим

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \text{ дм}.$$

Ответ: 17 *дм*.

Задача 6. Два одинаковых равносторонних цилиндра размещены так, что ось одного из них является образующей второго. Найти объем общей части этих цилиндров, если образующая равна a.

Решение. Дано два равносторонних цилиндра ($DM = MN = a = 2R$). Найти объем их общей части $AEDFF_1BE_1C$ (рис. 283).

Легко показать, что объем общей части цилиндров

$$V = AB \cdot S_{AEDF}.$$

Площадь общей части оснований цилиндра $AEDF$ равна сумме площадей двух одинаковых сегментов.

Так как $EF \perp AD$ и делит радиус основания цилиндра AD пополам, то EF сторона правильного вписанного в основание треугольника * EMF, т. е. $EF = R\sqrt{3}$ и дуга EDF содержит 120°.

Тогда

$$S_{\text{сегм } FAE} = S_{\text{сект } DFAE} - S_{\triangle DFE}.$$

Учитывая, что по условию $R = AD = \frac{a}{2}$, имеем

$$S_{\text{сегм } FAE} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

В таком случае площадь общей части оснований цилиндров

$$S_{AEDF} = 2S_{\text{сегм } FAE} = a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

и искомый объем

$$V = a \cdot a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{a^3}{24}(4\pi - 3\sqrt{3}).$$

Ответ: $V = \frac{a^3}{24}(4\pi - 3\sqrt{3}) \approx 0{,}3071a^3$ *кв. ед.*

---

* Для большей наглядности начертите без пространственных искажений два верхних основания цилиндров, т. е. два пересекающихся в точках E и F круга радиуса $R = AD$ с центрами в точках D и A.

§ 55. Конус

Конической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой AB (рис. 284), перемещающейся в пространстве так, что она при этом все время проходит через неподвижную точку S и пересекает данную линию CD.

Прямая AB называется образующей, точка S — вершиной, а линия CD — направляющей конической поверхности.

Отметим, что коническая поверхность, так же как и ее образующая AB, простираются в пространстве беспредельно.

Конусом называется тело, ограниченное частью конической поверхности с замкнутой направляющей и плоскостью P, не проходящей через вершину S и пересекающей все образующие конической поверхности (рис. 285).

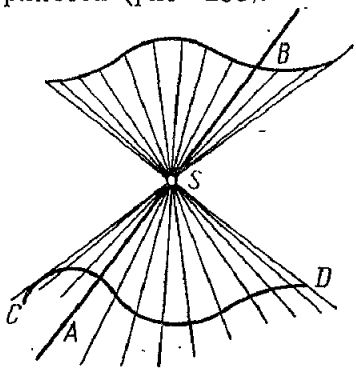


Рис. 284.

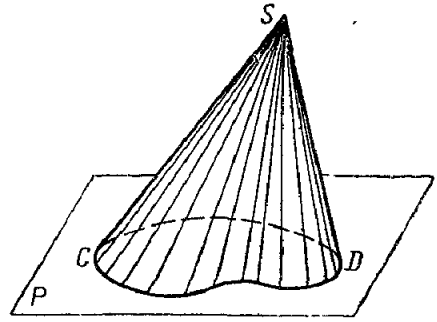


Рис. 285.

Вершина конической поверхности называется *вершиной* конуса; часть конической поверхности, ограниченная вершиной и секущей плоскостью — *боковой* поверхностью конуса, а часть секущей плоскости, выделенная конической поверхностью — *основанием* конуса. *Высотой* конуса называется длина перпендикуляра, опущенного из вершины конуса на плоскость основания.

Прямым *круговым* конусом называется конус, основанием которого является круг CD и высота которого SO проходит через центр окружности основания (рис. 286).

В дальнейшем прямой круговой конус будем называть просто конусом.

Конус можно получить вращением прямоугольного треугольника SOD (рис. 286) вокруг одного из катетов. Катет SO, вокруг которого происходит вращение, называется *осью конуса*, а гипотенуза является *образующей* конуса. Кроме того, катет OD равен радиусу основания конуса, а катет SO равен его высоте:

$$R = OD; \quad H = SO.$$

1. Боковая и полная поверхность конуса. В качестве боковой поверхности конуса принимается предел, к которому стремится боковая поверхность правильной вписанной (или описанной) в него пирамиды при неограниченном увеличении числа ее боковых граней. При этом длина ребра основания правильной пирамиды стремится к нулю.

Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей L:

$$S_{бок} = \pi RL.$$

Полная поверхность равна сумме боковой поверхности и площади основания:

$$S_{полн} = \pi R\,(R + L),$$

где $R = OD$ — радиус основания конуса, $L = SD$ — образующая конуса (рис. 286 или 287).

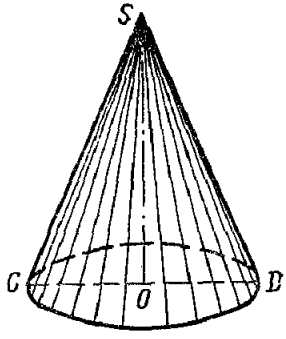


Рис. 286.

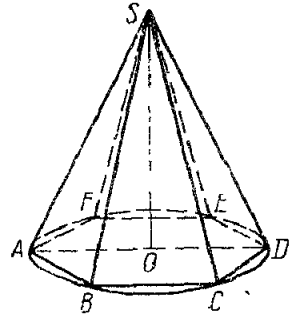


Рис. 287.

2. Развертка конуса. Если поверхность конуса разрезать по образующей и окружности основания и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность с основанием лежала в одной плоскости (рис. 288), то на плоскости получим фигуру, которая называется *разверткой конуса.* Развертка конуса состоит из сектора $SADA'$, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, и круга основания.

3. Объем конуса. В качестве величины объема конуса принимают предел, к которому стремится объем правильной вписанной (или описанной) в конус пирамиды при неограниченном увеличении числа ее боковых граней.

Объем конуса равен произведению площади основания на треть высоты:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Задача 1. Образующая конуса равна 37 *см*, а площадь осевого сечения равна 420 $см^2$. Найти площадь основания конуса.

Решение. Образующая $AS = 37$ *см*, площадь осевого сечения, т. е. площадь $\triangle ASC = 420$ $см^2$ (рис. 289). Найти $S_{осн}$. Обозначим $AO = R$, $AS = L = 37$ *см* и $SO = H$. Из прямоугольного треугольника AOS имеем:

$$R^2 + H^2 = L^2 = 37^2.$$

По условию $S_{сечения} = RH = 420$,

откуда

$$H = \frac{420}{R},$$

тогда

$$R^2 + \left(\frac{420}{R}\right)^2 = 1369$$

или

$$R^4 - 1369R^2 + 176400 = 0.$$

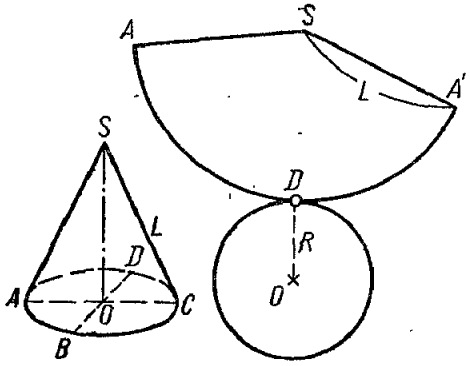


Рис. 288.

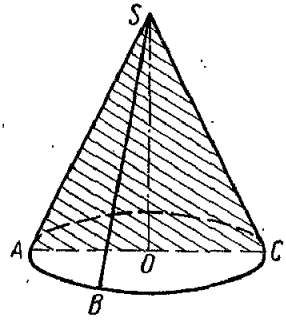


Рис. 289.

Решая это квадратное уравнение относительно R^2, находим

$$R^2 = R_1^2 = 144 \text{ } см^2; \quad R^2 = R_2^2 = 1225 \text{ } см^2,$$

и соответственно площадь основания конуса $S_{осн} = \pi R^2$ будет равна 144π $см^2$ или 1225π $см^2$.

Ответ: Задача имеет два решения $S_{осн} = 144\pi$ $см^2$ или $S_{осн} = 1225\pi$ $см^2$.

Задача 2. В треугольной пирамиде стороны основания равны 13; 20 и 21, а все боковые ребра равны по 36. Найти боковую поверхность конуса, описанного вокруг пирамиды.

Р е ш е н и е. Боковая поверхность конуса $S_{бок} = \pi RL$. Образующая конуса равна боковому ребру вписанной в него пирамиды, т. е. $L = 36$. Радиус основания конуса R будет равен радиусу окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

По известной из планиметрии формуле (см. § 17 формула 4), находим:

$$R = \frac{abc}{4S_{\triangle}} = \frac{13 \cdot 20 \cdot 21}{4\sqrt{27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6}} = 10\frac{5}{6};$$

тогда

$$S_{бок} = \pi RL = 390\pi.$$

О т в е т: $S_{бок} = 390\pi \approx 1225{,}22$ *кв. ед.*

З а д а ч а 3. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину прямого угла, параллельно гипотенузе. Найти поверхность тела вращения.

Р е ш е н и е. Прямоугольный $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) вращается вокруг прямой $OO_1 \parallel AB$. Точка C лежит на прямой OO_1 (рис. 290). Найти поверхность тела вращения, если $AC = b$ и $BC = a$.

Поверхность тела вращения будет состоять из боковой поверхности цилиндра $ABDE$ и боковых поверхностей двух конусов ACE и BCD.

Образующую цилиндра найдем из данного треугольника

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а радиусы оснований конусов и цилиндра, которые равны между собой, определим из $\triangle ABC$:

$$CF \cdot AB = AC \cdot CB.$$

Обозначив CF через R, найдем, что

$$R = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тогда поверхность тела вращения будет

$$S = \pi R\,(a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{\pi ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2}).$$

О т в е т: $S = \dfrac{\pi ab\,(a + b + 2\sqrt{a^2 + b^2})}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ *кв. ед.*

З а д а ч а 4. Высота и образующая конуса относятся, как 35 : 37. Полная поверхность конуса равна 588π *см*^{2}. Найти объем конуса.

Р е ш е н и е. Обозначим высоту конуса $H = 35x$, а образующую $L = 37x$. Тогда радиус основания конуса

$$R = \sqrt{L^2 - H^2} = \sqrt{(37x)^2 - (35x)^2} = 12x.$$

Полная поверхность конуса

$$S_{\text{полн}} = \pi R (R + L) = 12x\pi (12x + 37x) = 588\pi x^2$$

и по условию

$$588\pi x^2 = 588\pi.$$

Отсюда $x = 1$, тогда $R = 12$ *см*, $H = 35$ *см*. Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 35 = 1680\pi \text{ см}^3.$$

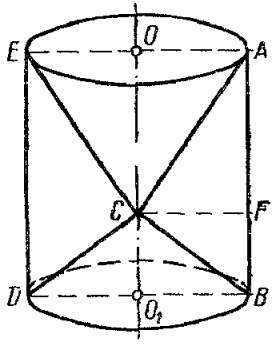


Рис. 290.

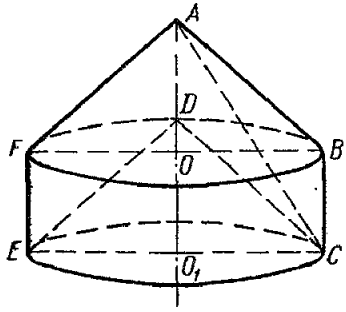


Рис. 291.

О т в е т: $V = 1680\pi \approx 5277{,}88$ *см*^{3}.

З а д а ч а 5. Параллелограмм, стороны которого равны 21 *см* и 89 *см*, а диагонали относятся, как 41 : 50, вращается вокруг меньшей стороны. Найти объем тела вращения.

Р е ш е н и е. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AD = 21$ *см*, $AB = 89$ *см* и $DB : AC = 41 : 50$ (рис. 291). Найти объем тела вращения, полученного при вращении данного параллелограмма вокруг меньшей стороны AD.

Объем тела вращения

$$V = V_{\text{цил } BFEC} + V_{\text{кон } AFB} - V_{\text{кон } DEC} = V_{\text{цил } BFEC},$$

так как

$$V_{\text{кон } AFB} = V_{\text{кон } DEC}.$$

Объем цилиндра $BFEC$

$$V_{\text{цил } BFEC} = \pi \cdot BC \cdot OB^2.$$

По условию задачи $BC = AD = 21$ *см*.

Найдем диагонали параллелограмма, обозначив $AC = 50x$, а $DB = 41x$, по свойству диагоналей параллелограмма

$$AC^2 + DB^2 = 2(AD^2 + AB^2)$$

или

$$2500x^2 + 1681x^2 = 2(21^2 + 89^2).$$

Отсюда $x = 2$ *см*, тогда $AC = 100$ *см*, $DB = 82$ *см*. Из $\triangle ACD$ ($\sphericalangle ADC > 90°$) находим

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DO_1$$

или

$$10000 = 441 + 7921 + 42 \cdot DO_1,$$

откуда

$$DO_1 = 39 \text{ см}.$$

Из прямоугольного треугольника DO_1C находим радиус основания цилиндра:

$$R = O_1C = \sqrt{DC^2 - DO_1^2} = \sqrt{89^2 - 39^2} = 80 \text{ см}.$$

Тогда объем цилиндра, равного объему искомого тела вращения,

$$V_{\text{цил}} = V = \pi \cdot 21 \cdot 80^2 = 134400\pi \text{ см}^3.$$

Ответ: $V = 134{,}4\pi \approx 422{,}23$ *дм*^{3}.

§ 56. Усеченный конус

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (рис. 292).

Основаниями усеченного конуса называются: основание полного конуса, из которого получен усеченный, и часть секущей плоскости, ограниченная конической поверхностью (круг). *Образующей* усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями усеченного конуса. *Высотой* усеченного конуса называется расстояние между его основаниями.

Усеченный конус может быть образован вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной к ее основаниям.

Сторона OO_1, вокруг которой вращается трапеция, называется *осью* усеченного конуса, а вторая боковая сторона AB трапеции будет *образующей* усеченного конуса (рис. 292). Основания трапеции являются соответственно *радиусами* нижнего и верхнего основания усеченного конуса:

$$OA = R; \quad BO_1 = r.$$

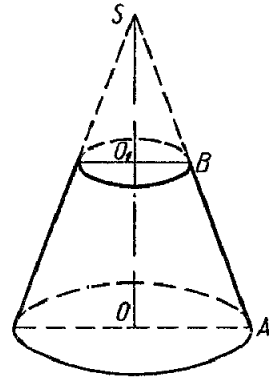


Рис. 292.

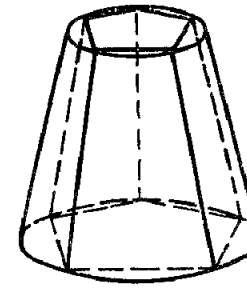


Рис. 293.

1. Боковая и полная поверхность усеченного конуса. В качестве величины боковой поверхности усеченного конуса принимается предел, к которому стремится величина боковой поверхности правильной вписанной (или описанной) в него усеченной пирамиды при неограниченном увеличении числа ее боковых граней.

Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению суммы длин окружностей оснований на половину образующей.

$$S_{\text{бок}} = \pi L (R + r),$$

где R и r — радиусы оснований усеченного конуса, а L — длина образующей.

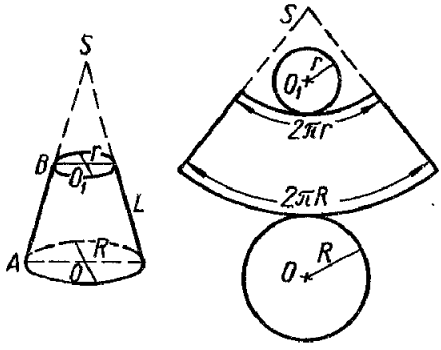


Рис. 294.

Полная поверхность усеченного конуса равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

$$S_{\text{полн}} = \pi L (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2.$$

2. Развертка усеченного конуса. Если поверхность усеченного конуса разрезать по образующей и окружностям оснований и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность вместе с основаниями лежали в одной плоскости (рис. 294), то на плоскости получим фигуру, которая называется *разверткой* усеченного конуса.

Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один — нижнее основание этого конуса, другой — верхнее и третий —

круг, площадь которого есть среднее геометрическое между площадями верхнего и нижнего оснований.

$$V_{\text{ус. кон}} = \frac{1}{3}\pi H\,(R^2 + rR + r^2),$$

где H — высота усеченного конуса, а R и r радиусы его оснований.

3. Подобные цилиндры и конусы. Два цилиндра, конуса или усеченных конуса называются *подобными*, если подобны их осевые сечения.

Боковые и полные поверхности подобных цилиндров, конусов и усеченных конусов относятся, как квадраты их сходственных линейных элементов (радиусов оснований, высот, образующих).

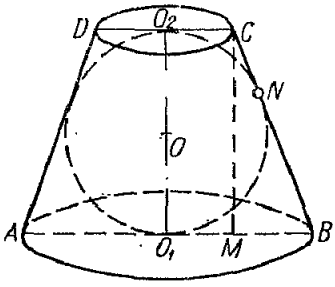


Рис. 295.

Объемы подобных цилиндров, конусов и усеченных конусов относятся, как кубы их сходственных линейных элементов (радиусов оснований, высот, образующих).

Задача 1. Доказать, что если в осевое сечение усеченного конуса можно вписать окружность, то его высота есть средняя пропорциональная между диаметрами оснований.

Решение. Пусть в осевое сечение $ABCD$ усеченного конуса AC вписан круг O (рис. 295). Обозначим $AO_1 = R$, $DO_2 = r$, $O_2O_1 = H$, $AD = L$. Требуется доказать, что $H = 2\sqrt{rR}$.

Осевым сечением является равнобочная трапеция $ABCD$. Из точки C на AB опустим перпендикуляр $CM \perp AB$, тогда

$$MB = O_1B - O_1M = O_1B - O_2C = R - r.$$

По свойству касательных, проведенных из одной и той же точки к окружности,

$$O_2C = CN \text{ и } O_1B = NB.$$

Отсюда

$$O_2C + O_1B = CN + NB,$$

т. е.

$$L = R + r.$$

Из прямоугольного треугольника CMB ($\angle M = 90°$) находим:

$$CM = H = \sqrt{CB^2 - MB^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{rR},$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Определить боковую поверхность усеченного конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол в 60°, а площадь осевого сечения равна S.

Р е ш е н и е. Пусть дан усеченный конус CA, площадь осевого сечения которого равна S и $\angle ABO = 60°$ (рис. 296). Найти боковую поверхность усеченного конуса, которую обозначим S_x.

В равнобочной трапеции $ABCD$ из вершины A на основание CB опустим перпендикуляр $AM \perp CB$. Обозначим $AB = L$, $OB = R$, $O_1A = r$. В прямоугольном $\triangle AMB$ по условию $\angle MAB = 30°$, поэтому

$$MB = \frac{1}{2}L, \quad AM = H = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

По условию задачи площадь осевого сечения

$$(R + r)H = S$$

или

$$\frac{\sqrt{3}}{2}L(R + r) = S.$$

Умножая обе части последнего равенства на число π, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi L(R + r) = \pi S$$

и, учитывая, что боковая поверхность усеченного конуса

$$S_x = \pi L(R + r),$$

находим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_x = \pi S.$$

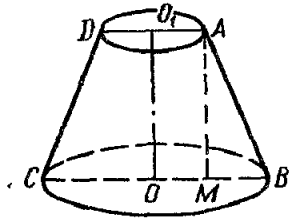


Рис. 296.

О т в е т:

$$S_x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi S \text{ кв. ед.}$$

З а д а ч а 3. В усеченном конусе радиусы оснований и образующая относятся, как 3 : 11 : 17, а объем равен 815π $см^3$. Найти полную поверхность усеченного конуса.

Р е ш е н и е. Обозначим $O_1A = r = 3x$, $OB = R = 11x$ и $AB = L = 17x$ (рис. 296).

Тогда из прямоугольного треугольника AMB

$$AM = H = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \sqrt{(17x)^2 - (11x - 3x)^2} = 15x.$$

По условию задачи объем усеченного конуса 815π, следовательно,

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + rR + r^2) = \frac{15\pi x}{3}[(11x)^2 + 33x^2 + (3x)^2] =$$

$$= 815\pi x^3 = 815\pi.$$

Отсюда $x = 1$ *см*, тогда $R = 11$ *см*, $r = 3$ *см*, $L = 17$ *см*. Полная поверхность усеченного конуса:

$$S_{\text{полн}} = \pi\,[(R + r)\,L + R^2 + r^2] = 368\pi \text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{\text{полн}} = 368\pi \approx 1156{,}11$ *см*^{2}.

Задача 4. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r. Плоскость, параллельная основаниям, разделила его на два подобных усеченных конуса. Найти отношение объемов полученных конусов.

Решение. Пусть усеченные конусы CN и MA подобны (рис. 297) и $OB = R$, $O_1A = r$; $O_2N = x$. Из определения подобия усеченных конусов следует, что трапеции AO_1O_2N и NO_2OB подобны,

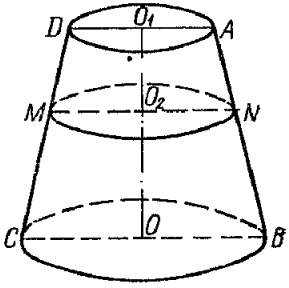


Рис. 297.

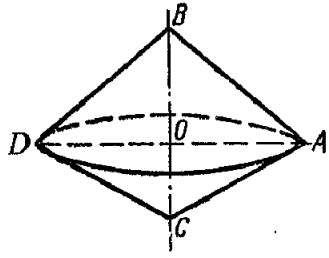


Рис 298.

тогда

$$r : x = x : R,$$

откуда

$$x = \sqrt{rR}.$$

Объемы подобных тел относятся, как кубы сходственных линейных элементов:

$$V_{MA} : V_{CN} = O_1A^3 : O_2N^3$$

или

$$\frac{V_{MA}}{V_{CN}} = \frac{r^3}{(\sqrt{rR})^3} = \sqrt{\frac{r^3}{R^3}}.$$

Ответ: $V_{MA} : V_{CN} = r\sqrt{r} : R\sqrt{R}$.

Задача 5. Если треугольник ABC вращается вокруг стороны $BC = a$, то объем полученного тела $V_a = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{Q^2}{a}$, где Q — площадь треугольника. Доказать.

Решение. Объем тела вращения составлен из двух конусов BAD и CAD (рис. 298). Обозначим $AO = h$ высоту треугольника ABC,

опущенную на сторону BC, которая одновременно является радиусом основания конусов. Тогда, обозначая объем искомого тела вращения через V_a, имеем

$$V_a = V_{\text{кон. } ABD} + V_{\text{кон. } CAD}$$

или

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 (CO + OB) = \frac{1}{3}\pi a h^2.$$

Учитывая, что по условию $ah = 2Q$, найдем:

$$V_a = \frac{1}{3}\pi a h^2 = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2 h^2}{a} = \frac{4}{3}\pi \frac{Q^2}{a},$$

что и требовалось доказать.

Формула справедлива для любого треугольника, но если угол будет тупой, то в ходе доказательства надо будет учитывать, что тогда

$$V_a = V_{\text{кон. } ABD} - V_{\text{кон. } CAD}.$$

Выполните все доказательство для этого случая и рассмотрите также случаи, когда $\angle C = 90°$ и когда $\angle B \geqslant 90°$.

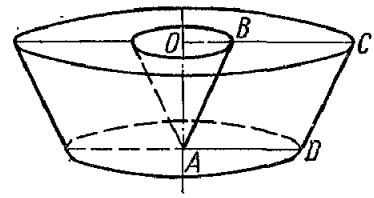


Рис. 299.

Задача 6. Ромб со стороной a и острым углом в 60° вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно к стороне. Определить объем тела вращения. Вычислить величину этого объема при $a = 8{,}7$ *см*.

Решение. Ромб $ABCD$ с острым углом $A = 60°$ и стороной $AB = a$ вращается вокруг оси $AO \perp AD$ (рис. 299). Найти объем тела вращения, который обозначим V_x. Объем тела вращения будет равен разности объемов усеченного конуса $ADCO$ и конуса ABO:

$$V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot AO\,(OC^2 + AD \cdot OC + AD^2) - \frac{1}{3}\pi \cdot AO \cdot OB^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot AO\,(OC^2 + AD \cdot OC + AD^2 - OB^2).$$

Рассмотрим треугольник AOB ($\angle AOB = 90°$ и $\angle BAO = 30°$). В этом треугольнике $AB = a$, тогда $BO = \frac{1}{2}a$, $AO = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Подставляя эти значения в формулу для объема тела вращения, найдем:

$$V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a\left[\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + a \cdot \frac{3}{2}a + a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right] = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3.$$

Ответ: При $a = 8{,}7$ *см* имеем $a^3 = 658{,}503$ *см*^{3} и тогда

$$V_x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3 \approx 2687{,}38 \text{ см}^3 \approx 2{,}687 \text{ дм}^3.$$

§ 57. Конические сечения

Коническими сечениями называются плоские кривые, образуемые при пересечении плоскостью конической поверхности, направляющей которой служит окружность. Конические сечения являются кривыми второго порядка.

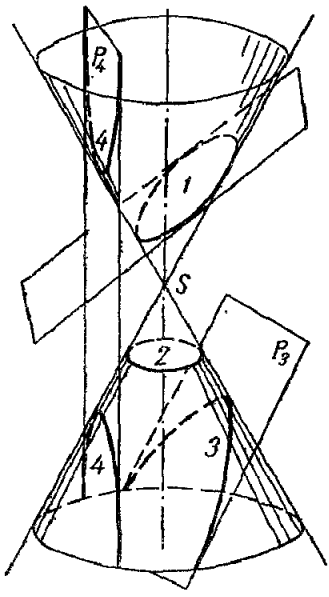


Рис. 300.

Если секущая плоскость P_1 не параллельна ни одной из образующих конической поверхности, то коническим сечением будет либо эллипс (плоскость не проходит через вершину S конической поверхности и не перпендикулярна ее оси, рис. 300, кривая *1*), либо окружность (плоскость не проходит через вершину S, но перпендикулярна оси конической поверхности, рис. 300, кривая 2), либо точка (плоскость проходит через вершину S). Таким образом, окружность и точку можно рассматривать как частные случаи эллипса.

Если секущая плоскость P_3 параллельна только одной из образующих конической поверхности так, что она пересекает только одну из ее полостей (например, нижнюю), то коническим сечением является парабола (рис. 300, кривая *3*).

Если секущая плоскость P_4 параллельна двум образующим конической поверхности (в этом случае секущая плоскость также параллельна и ее оси), то коническим сечением будет гипербола. В этом случае секущая плоскость пересекает уже не одну, а две полости конической поверхности и соответственно этому гипербола состоит из двух ветвей (рис. 300, кривые *4*). В частности, когда плоскость проходит через вершину S, имеем пару пересекающихся прямых.

Отметим, что ветви параболы и гиперболы простираются как угодно далеко и эти кривые являются не замкнутыми.

§ 58. Сфера и шар

Шаровой поверхностью, или *сферой*, называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки, называемой *центром сферы* (рис. 301).

Радиусом сферы называется отрезок прямой, соединяющий центр сферы с любой ее точкой, например, $AO = OB = R$. *Хордой* сферы

называется отрезок прямой, соединяющий две ее любые точки. *Диаметром* сферы называется хорда, проходящая через ее центр, например, AC или BD. *Шаром* называется тело, ограниченное сферой. Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра.

1. Сечение сферы и шара плоскостью. *Сечение сферы любой плоскостью есть окружность. Сечение шара любой плоскостью есть круг.* Круг, образованный сечением шара плоскостью, проходящей через центр, называется *большим кругом шара*, а круг, образованный сечением шара плоскостью, не проходящей через центр, называется *малым кругом шара*. Сечения, равноотстоящие от центра шара, равны.

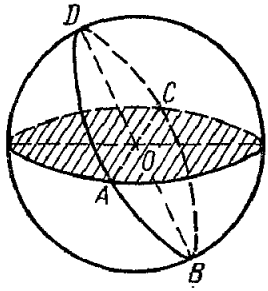


Рис. 301.

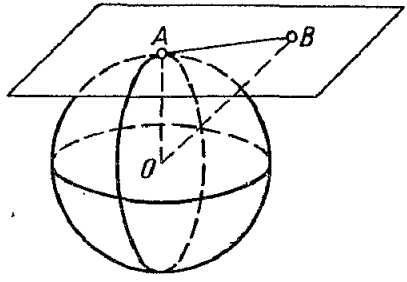


Рис. 302.

Из двух сечений, неодинаково удаленных от центра шара, больший радиус имеет то, которое ближе к центру.

Всякая плоскость, проходящая через центр шара, делит его поверхность на две симметричные и равные части (рис. 301).

Через две точки сферы, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести окружность большого круга и притом только одну.

Окружности двух больших кругов при пересечении делятся пополам (рис. 301).

2. Плоскость, касательная к шару. *Касательной плоскостью к шаровой поверхности* называется плоскость, имеющая с этой поверхностью только одну общую точку (рис. 302).

Плоскость, перпендикулярная к радиусу шаровой поверхности в его конце, лежащем на этой поверхности, есть касательная плоскость. Обратно: *касательная плоскость перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

§ 59. Поверхность и объем шара и его частей

Часть шаровой поверхности, отсекаемая от нее какой-нибудь плоскостью, называется *сегментной поверхностью* (рис. 303).

Окружность пересечения CD плоскости с шаровой поверхностью

называется *основанием*, а отрезок $AB = H$ радиуса, перпендикулярного к плоскости сечения, — *высотой сегментной поверхности*.

Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями, называется *шаровым поясом* (рис. 304).

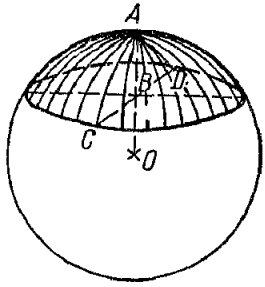


Рис. 303.

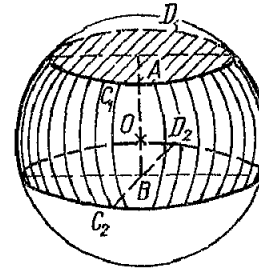


Рис. 304.

Окружности сечения C_1D_1 и C_2D_2 называются *основаниями шарового пояса*, а расстояние $AB = H$ между параллельными плоскостями — *высотой* пояса.

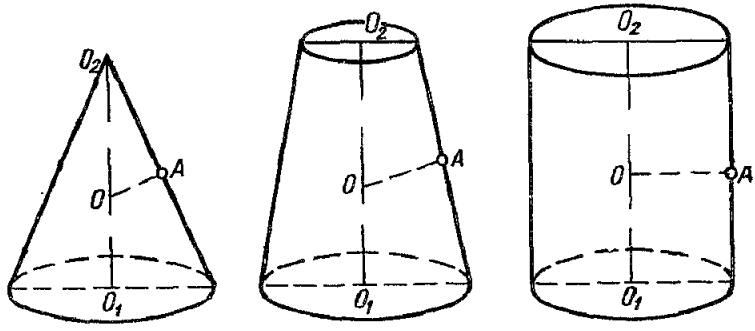


Рис. 305.

1. Лемма о боковой поверхности конуса, усеченного конуса и цилиндра. Боковая поверхность каждого из трех тел: конуса, усеченного конуса и цилиндра — равна произведению высоты тела на длину окружности, у которой радиус есть перпендикуляр, восстановленный к образующей из ее середины до пересечения с осью.

Боковая поверхность конуса, усеченного конуса и цилиндра равна (рис. 305):

$$\pi \cdot OA^2 \cdot O_1O_2.$$

2. Поверхность шарового сегмента, пояса и шара. В качестве величины поверхности шарового сегмента, пояса и шара, образуемого вращением какой-нибудь части полуокружности или всей полуокружности вокруг диаметра (рис. 306), принимают предел, к которому стремится поверхность, образуемая вращением вокруг того же диаметра правильной вписанной ломаной линии в соответствующую часть дуги окружности при неограниченном увеличении числа ее звеньев.

Сегментная поверхность равна произведению ее высоты на длину окружности большого круга:

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi RH,$$

где R — радиус большого круга шара, а H — высота сегментной поверхности.

Поверхность шарового пояса равна произведению высоты пояса на длину окружности большого круга:

$$S_{\text{пояса}} = 2\pi RH,$$

где R — радиус окружности большого круга шара, а H — высота пояса.

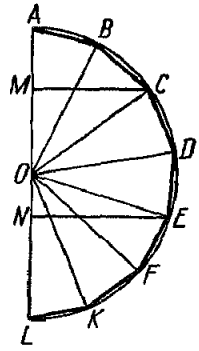


Рис. 306.

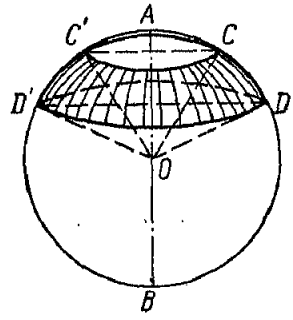


Рис. 307.

Поверхность шара равна произведению длины окружности большого круга на диаметр:

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2,$$

где R — радиус шара.

Поверхности шаров относятся, как квадраты их радиусов или диаметров.

3. Шаровой сегмент, слой и сектор. *Шаровым сегментом* называется тело, отсекаемое от шара плоскостью.

Шаровым слоем называется тело, отсекаемое от шара двумя секущими параллельными плоскостями.

Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора вокруг оси, лежащей в его плоскости, проходящей через его центр и не пересекающей сектора.

Если ось вращения совпадает с радиусом, ограничивающим круговой сектор AOC, то полученный в результате вращения шаровой сектор называется простым, а если ось вращения не совпадает с радиусом, ограничивающим круговой сектор COD, то шаровой сектор называют полым (рис. 307).

4. Объем тела, полученного от вращения плоской фигуры вокруг оси. Швейцарскому математику Паулю Гюльдену (1577—1643) —

автору ряда глубоких исследований о центре тяжести тел, принадлежат также теоремы об объеме и поверхности тел вращения.

Теорема Гюльдена. *Объем тела, описываемого плоской фигурой при вращении ее вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести этой площади*

$$V_{\text{тела вр}} = 2\pi S d_c,$$

где S — площадь вращающейся фигуры, а d_c — расстояние от центра тяжести фигуры до оси вращения.

В элементарной геометрии рассматривается лемма об объеме тела, полученного от вращения треугольника вокруг оси.

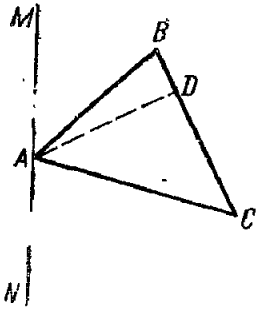


Рис. 308.

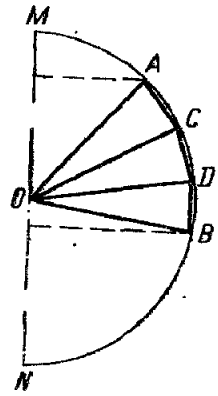


Рис. 309.

Лемма. Если треугольник ABC (рис. 308) вращается вокруг оси MN, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину A, но не пересекает стороны BC, то объем тела, полученного при этом вращении, равен произведению поверхности S_{BC}, образуемой противоположной стороной BC, на одну треть высоты треугольника, опущенной на эту сторону, т. е.

$$V_{\text{тела вр}} = \frac{AD}{3} \cdot S_{BC}.$$

5. Объем шарового сектора и шара. Объем шарового сектора, получаемого вращением вокруг диаметра MN кругового сектора AOB (рис. 309), есть предел, к которому стремится объем тела, образуемого вращением многоугольника, ограниченного радиусами OA и OB и правильной ломаной линией $ACDB$. Эта ломаная вписана в дугу кругового сектора, когда число сторон ее неограниченно увеличивается (и, следовательно, длина каждой из сторон AC, CD, ... стремится к нулю).

Объем шарового сектора равен произведению поверхности соответствующего шарового пояса (или шарового сегмента) на треть радиуса:

$$V_{\text{шар. сект}} = 2\pi RH \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где R — радиус шарового сектора, а H — высота шарового пояса (сегмента).

Объем шара равен произведению его поверхности на треть радиуса:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6},$$

где R — радиус шара, D — диаметр шара.

Формулу для объема шара получаем, положив в формуле для объема шарового сектора $H = 2R$.

Объемы шаров относятся, как кубы их радиусов или диаметров.

Объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота цилиндра равна радиусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента, т. е.

$$V_{\text{шар. сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

где h — высота сегмента, а R — радиус шара.

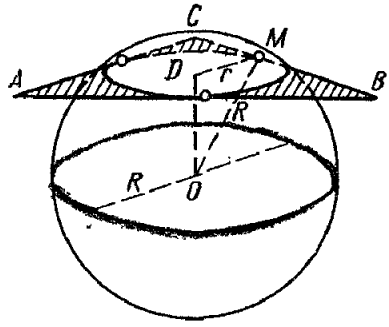


Рис. 310.

Рассмотрим несколько задач на круговые тела.

Задача 1. Стороны треугольника равны 15 *см*, 14 *см* и 13 *см*. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника, если радиус шара равен 5 *см*.

Решение. Дан шар O радиуса $R = 5$ *см* и $\triangle ABC$, стороны которого касаются поверхности шара и равны $AB = 15$ *см*, $BC = 14$ *см* и $AC = 13$ *см* (рис. 310). Найти расстояние от центра шара до плоскости $\triangle ABC$.

Плоскость треугольника ABC пересечет шар O по кругу, вписанному в данный треугольник. Основание перпендикуляра OD, опущенного из центра шара O на плоскость треугольника ABC, попадет в центр этого круга D.

Пусть $DM = r$ радиус круга D, проведенный в точку касания стороны CB к поверхности шара. Тогда из прямоугольного треугольника ODM находим:

$$OD = \sqrt{OM^2 - DM^2}.$$

Раднус шара $R = OM = 5$ *см*. Радиус круга D, вписанного в данный треугольник, найдем по формуле

$$r = DM = \frac{S}{p},$$

где S — площадь, а p — полупериметр треугольника:

$$DM = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}}{21} = 4 \text{ см}.$$

Подставляя найденные значения в формулу для OD, находим искомое расстояние:

$$OD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ см}.$$

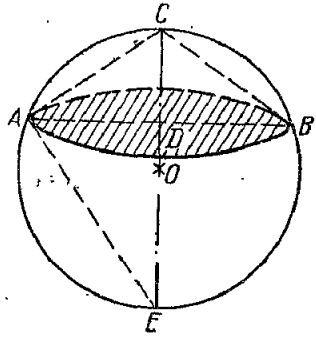


Рис. 311.

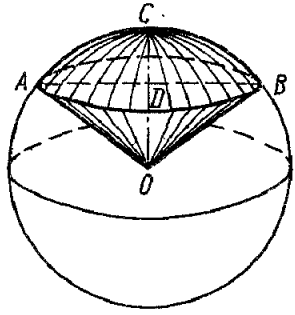


Рис. 312.

Задача 2. Доказать, что боковая поверхность конуса, вписанного в шаровой сегмент, есть средняя пропорциональная между площадью основания и боковой поверхностью сегмента (рис. 311).

Решение. Пусть в шаровой сегмент ACB вписан конус (основание конуса и сегмента общее). Требуется доказать, что $S^2_{\text{бок. кон}} = S_{\text{шар. сегм}} \cdot S_{\text{круга } D}$. Обозначим $OC = R$ — радиус шара, $AD = r$ — радиус основания конуса (сегмента), $CD = h$ — высота сегмента и $CB = l$ — образующая конуса.

Из прямоугольного треугольника CAE ($\angle A = 90°$) по свойству катета имеем:

$$AC^2 = CE \cdot CD$$

или

$$l^2 = 2R \cdot h.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\pi^2 r^2$, получим

$$\pi^2 r^2 l^2 = 2\pi Rh \cdot \pi r^2$$

или

$$(\pi rl)^2 = (2\pi Rh) \cdot (\pi r^2).$$

Отсюда, поскольку

$$\pi rl = S_{\text{бок. кон}},\ 2\pi Rh = S_{\text{шар. сегм}},\ \pi r^2 = S_{\text{круга}},$$

то, после очевидных упрощений, находим:

$$S^2_{\text{бок. кон}} = S_{\text{шар. сегм}} \cdot S_{\text{кр}},$$

что и требовалось доказать.

Задача 3. Определить, какую часть объема шара составляет объем сферического сектора, у которого сферическая и коническая поверхности равновелики.

Решение. Пусть на рис. 312 изображен шаровой сектор $OACB$, у которого сферическая поверхность равновелика конической.

Если обозначить $OA = R$, $AD = r$ и $CD = h$, то

$$2\pi Rh = \pi rR,$$

так как по условию задачи сферическая поверхность шарового сектора равна конической. В таком случае

$$2h = r.$$

Из прямоугольного треугольника ADO ($\angle D = 90°$), учитывая, что $OD = R - h$, получим:

$$R^2 = (2h)^2 + (R - h)^2,$$

откуда

$$h = \frac{2}{5} R.$$

Объем шарового сектора

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{2}{3} \pi h R^2 = \frac{4}{15} \pi R^3 = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right)$$

и, следовательно,

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{1}{5} V_{\text{шара}}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Задача 4. Доказать, что объем тела, полученного при вращении кругового сегмента с хордой a вокруг диаметра, параллельного этой хорде, не зависит от величины радиуса круга.

Решение. При вращении сегмента AmB, хорда которого $AB = a$, вокруг параллельного этой хорде диаметра EF, получим тело,

объем которого будет равен объему шара O без объемов цилиндра $ABB'A'$ и двух шаровых сегментов $A'EAD$ и $B'FBC$ (рис. 313).

Обозначим $OB = R$, $ED = CF = h = \dfrac{2R - a}{2}$, $CB = r$ и по условию $AB = a$.

Объем тела вращения:

$$V_{\text{тела вращ}} = V_{\text{шара}} - V_{\text{цил}} - 2V_{\text{сегм}}.$$

Далее, согласно введенным обозначениям, будем иметь

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V_{\text{цил}} = \pi a r^2,$$

$$V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

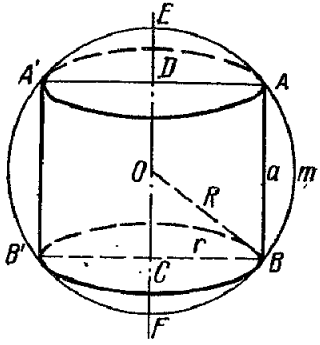


Рис. 313.

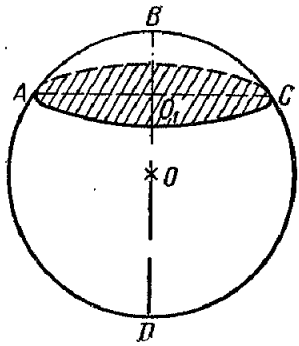


Рис. 314.

Из $\triangle OCB$ ($\angle C = 90°$), учитывая, что $OC = \dfrac{a}{2}$, находим

$$r^2 = R^2 - \frac{a^2}{4},$$

тогда

$$V_{\text{цил}} = \pi \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) a$$

и соответственно

$$V_{\text{сегм}} = \frac{1}{4}\pi (2R - a)^2 \left(R - \frac{2R - a}{6}\right).$$

Подставляя найденные значения $V_{\text{шара}}$, $V_{\text{цил}}$, $V_{\text{сегм}}$, получаем:

$$V_{\text{тела вр}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right)a - \pi(2R - a)^2 \cdot \frac{4R + a}{12} = \frac{\pi a^3}{6},$$

т. е. объем тела, полученного от вращения кругового сегмента вокруг диаметра, параллельного его хорде, равен объему шара, диаметром которого служит хорда сегмента.

Таким образом, искомый объем тела вращения зависит только от величины хорды сегмента и не зависит от радиуса круга сегмента.

Задача 5. Плоскость делит объем шара в отношении 7 : 20. В каком отношении она делит поверхность шара?

Решение. Пусть плоскость круга O_1 делит объем шара в отношении 7 : 20 (рис. 314). Проведем диаметр шара BD перпендикулярно плоскости круга O_1 и обозначим $BO_1 = h$, $OB = R$, тогда $O_1D = 2R - h$.

По условию задачи

$$V_{\text{шар. сегм } ABC} : V_{\text{шар. сегм } ADC} = 7 : 20$$

или

$$\pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) : \pi(2R - h)^2\left[R - \frac{1}{3}(2R - h)\right] = 7 : 20.$$

Отсюда, после преобразований, находим:

$$\frac{3Rh^2 - h^3}{4R^3 - 3Rh^2 + h^3} = \frac{7}{20}.$$

Заменим $R = hx$ и заметим, что поскольку $h < R$, то $x > 1$.

Тогда

$$\frac{3h^3x - h^3}{4h^3x^3 - 3h^3x + h^3} = \frac{7}{20}$$

или

$$28x^3 - 81x + 27 = 0.$$

Разлагая левую часть уравнения на множители, получим

$$(2x - 3)(14x^2 + 21x - 9) = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_{2;\,3} = \frac{-21 \pm \sqrt{945}}{28}.$$

Так как $x > 1$, то корни x_2 и x_3 не удовлетворяют условиям задачи. и, следовательно,

$$R = hx_1 = \frac{3}{2}h.$$

Теперь найдем отношение поверхностей шарового сегмента $S_{ABC} = S_1$ и шарового сегмента $S_{ADC} = S_2$:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi Rh}{2\pi R(2R - h)} = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1 : 2.

§ 60. Вписанный и описанный шары

Шар называется *вписанным в многогранник*, а многогранник — *описанным вокруг шара*, если плоскости всех граней касаются шара. Если шар находится внутри многогранника, то он называется *вписанным* внутренним образом или просто вписанным, а если вне многогранника,— то *вневписанным*.

Шар называется *описанным вокруг многогранника*, а многогранник — *вписанным в этот шар*, если все вершины многогранника лежат на поверхности шара.

Шар называется *вписанным в конус*, усеченный конус и цилиндр, если поверхность шара касается плоскостей оснований этих фигур и всех образующих их боковых поверхностей.

Шар называется *описанным вокруг конуса*, если поверхность шара проходит через вершину конуса, а окружность основания конуса лежит на поверхности шара. Шар называется *описанным вокруг цилиндра и усеченного конуса*, если окружности их оснований лежат на поверхности шара.

Заметим, что в треугольную и любую правильную пирамиду и конус всегда можно вписать шар, а вокруг треугольной пирамиды, цилиндра и усеченного конуса всегда можно описать шар.

Для других пространственных фигур условия возможности и невозможности вписать в них шар и описать шар вокруг них должны быть в каждом случае специально установлены. Например, вокруг прямой призмы можно описать шар, если в основании призмы лежит многоугольник, вокруг которого можно описать окружность.

Задача 1. Доказать, что объем многогранника, описанного вокруг шара, равен произведению полной поверхности многогранника на треть радиуса шара.

Решение. Проведем доказательство для четырехгранника, что не нарушает общности результата. Пусть в четырехгранник $ABCD$ вписан шар O, поверхность которого касается граней четырехгранника в точках L, M, N, P (рис. 315).

Через центр шара и ребра четырехгранника проведем плоскости, которые разделят четырехгранник на четыре треугольные пирамиды $OABC$, $OACD$, $OABD$ и $OBCD$. Радиусы шара OL, OM, ON и OP, проведенные в точки касания, будут высотами этих пирамид.

Тогда

$$V_{ABCD} = V_{OABC} + V_{OACD} + V_{OABD} + V_{OBCD}$$

или

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} r (S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ACD} + S_{BCD}),$$

где S_{ABC}, S_{ABD}, S_{ACD} и S_{BCD} — площади граней четырехгранника, а r — радиус вписанного шара.

Тогда

$$V = \frac{1}{3} r S_{\text{полн}},$$

что и требовалось доказать.

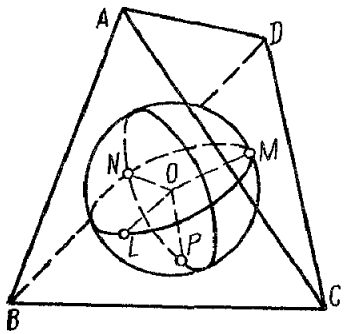


Рис. 315.

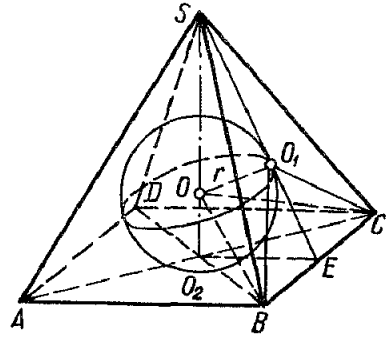


Рис. 316.

Из доказанного следует, что радиус вписанного в многогранник шара равен утроенному объему многогранника, деленному на его полную поверхность

$$r = \frac{3V}{S}.$$

Задача 2. В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанного и описанного шаров совпадают. Определить плоский угол при вершине пирамиды.

Решение. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и точка O — центр вписанного в пирамиду шара и центр описанного вокруг пирамиды шара (рис. 316).

Точка O_1 — центр окружности, описанной вокруг треугольника SBC, тогда перпендикуляр из центра шара на плоскость треугольника SBC попадет в точку O_1 и OO_1 будет радиусом вписанного в пирамиду шара.

$OB = OC = SO = R$ — радиусы описанного шара; $OO_2 = OO_1 = r$ — радиусы вписанного шара. Тогда прямоугольные треугольники OO_2B, OO_1B, OO_2C и OO_1C равны между собой. Из их равенства следует, что $BO_2 = CO_2 = BO_1 = CO_1$ и треугольники BO_2C и BO_1C равны.

В таком случае

$$\angle BO_2C = \angle BO_1C = 90°.$$

Далее, $SO_1 = BO_1 = CO_1$ — как радиусы окружности, описанной вокруг треугольника SBC.

Из равнобедренного $\triangle BO_1S$ по свойству внешнего угла

$$\angle BSE = \frac{1}{2} \angle BO_1E.$$

Тогда

$$\angle BSC = \frac{1}{2} \angle BO_1C = 45°.$$

Ответ: 45°.

Задача 3. Вокруг шара описан усеченный конус, образующая которого равна a. Найти боковую поверхность этого конуса.

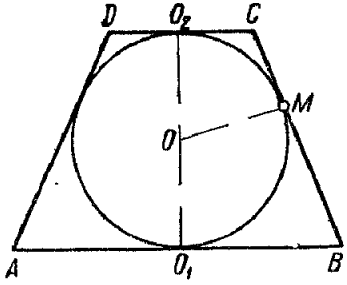


Рис. 317.

Решение. На рис. 317 изображено осевое сечение усеченного конуса с вписанным в него шаром. По условию задачи $BC = a$. Обозначим $O_1B = R$, а $O_2C = r$. Тогда по свойству касательных, выходящих из одной и той же точки к окружности,

$$O_2C = CM \text{ и } O_1B = MB$$

или

$$O_1B + O_2C = CB = a, \text{ т. е. } R + r = a.$$

Следовательно, искомая боковая поверхность усеченного конуса:

$$S_{бок} = \pi (R + r)\, a = \pi a^2.$$

Задача 4. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, основанием которой служит ромб с диагоналями 6 и 8, а высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 1.

Решение. По диагоналям ромба, найдем его сторону

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Радиус вписанного в ромб круга будет равен

$$r = \frac{2S}{P},$$

где S — площадь ромба, а P — его периметр. Тогда

$$r = \frac{6 \cdot 8}{20} = 2{,}4.$$

Высота боковой грани пирамиды

$$m = \sqrt{h^2 + r^2},$$

где h — высота пирамиды, а r — радиус вписанного в основание круга.

Выполнив вычисления, находим, что

$$m = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6.$$

Полная поверхность пирамиды

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}(20 \cdot 2{,}6 + 8 \cdot 6) = 50,$$

а объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 1 = 8.$$

Пользуясь результатом задачи 1 данного параграфа, найдем искомый радиус R шара, вписанного в пирамиду

$$R = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 8}{50} = 0{,}48.$$

§ 61. Геометрические места точек и прямых в пространстве

Общее определение геометрического места точек было дано в § 29.

По сравнению с геометрическим местом точек на плоскости, представления и построения геометрического места точек в пространстве вызывают гораздо больше трудностей, что связано как со сложностью, так и с большим разнообразием примеров. Однако упражнения и тренировки на представление (устное решение) и фактическое построение геометрического места точек в пространстве крайне необходимы для развития пространственного мышления и успешного решения многих стереометрических задач на вычисление, построение и доказательства.

Приведем ряд примеров на геометрические места точек в пространстве.

1. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной плоскости Q на расстояние m, есть две плоскости, параллельные плоскости Q и расположенные по обе стороны от нее на расстоянии m.

2. Геометрическое место вершин пирамид, имеющих данный объем V и построенных на данном основании S, есть плоскости, параллельные основанию и расположенные от него на расстоянии, равном общей высоте указанных пирамид

$$h = \frac{3V}{S}.$$

3. Геометрическое место центров сфер данного радиуса, касающихся двух пересекающихся плоскостей, есть четыре прямые, параллельные линии пересечения данных плоскостей.

4. Геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек A и B равно $a : b$, есть сфера с диаметром, соединяющим точки M и N, которые делят отрезок AB в данном отношении внутренним и внешним образом.

5. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку A и касающихся данной сферической поверхности, есть круговая, коническая поверхность с вершиной в точке A.

6. Геометрическое место перпендикуляров, опущенных из данной точки A на плоскости, проходящие через данную прямую l, есть круг, диаметр которого равен расстоянию от точки A до прямой l.

7. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку A и пересекающих данную плоскость под заданным углом α, есть коническая поверхность с вершиной в точке A и с углом в осевом сечении $\beta = 90° - \alpha$.

8. Геометрическое место точек, симметричных данной точке N относительно всех точек плоскости Q и одинаково удаленных точки N, есть окружность, лежащая в плоскости P, параллельной плоскости Q.

Задача 1. Найти геометрическое место точек, находящихся на данной плоскости Q, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

Решение. Предположим, что N — произвольная точка искомого геометрического места. Соединим точку N с концами A и B данного отрезка (рис. 318). Поскольку по условию задачи $\triangle ABN$ — прямоугольный, то $NO = \frac{1}{2} AB$ (как медиана, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу). Следовательно, точка O равноудалена от всех точек искомого геометрического места точек.

Таким образом, все искомые точки равноудалены от некоторой точки O_1, являющейся проекцией точки O на плоскость Q.

Следовательно, искомое геометрическое место точек есть окружность, расположенная на плоскости Q и имеющая радиус

$$R = O_1N = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - OO_1^2}.$$

Задача 2. Доказать, что геометрическое место точек, равноудаленных от сторон данного в пространстве угла ASB, есть плоскость, проходящая через биссектрису данного угла и перпендикулярная к плоскости, в которой он находится.

Решение. Пусть FS — биссектриса данного угла ASB, а Q — плоскость, перпендикулярная к плоскости $\angle ASB$ и проходящая через его биссектрису (рис. 319).

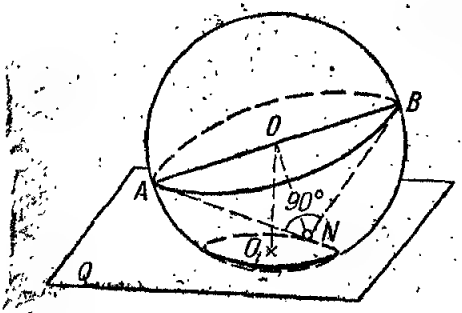


Рис. 318.

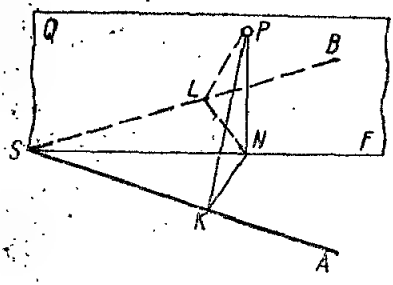


Рис. 319.

Возьмем в плоскости Q произвольную точку P и проведем $PN \perp$ пл. ASB. Перпендикуляр PN будет лежать в плоскости Q. Проведем $NK \perp SA$, $NL \perp SB$ и соединим точку P с точками K и L, тогда (по двум равным катетам)

$$\triangle PKN = \triangle PLN.$$

Следовательно, $PL = PK$. Поскольку же точка P взята на плоскости Q произвольно, то утверждение доказано для всех точек плоскости Q.

На этом мы заканчиваем изложение стереометрии и переходим к тригонометрии. Литература, в которой читатель найдет дальнейшие сведения по стереометрии, приведена в конце справочника.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 62. Предмет тригонометрии

Тригонометрия — слово греческое и в буквальном переводе означает измерение треугольников (τριγωνον — треугольник, а μετρεω — измеряю).

В данном случае измерение треугольников следует понимать как решение треугольников, т. е. определение сторон, углов и других элементов треугольника, если даны некоторые из них. Большое количество практических задач, а также задач планиметрии, стереометрии, астрономии и других наук приводятся к задаче решения треугольников.

Возникновение тригонометрии связано с землеизмерением, с астрономией и строительным делом.

Впервые способы решения треугольников, основанные на зависимостях между сторонами и углами треугольника, были найдены древнегреческими астрономами Гиппархом (2 в. до н. э.) и Клавдием Птолемеем (2 в. н.э.). Позднее зависимости между отношениями сторон треугольника и его углами начали называть тригонометрическими функциями.

Значительный вклад в развитие тригонометрии внесли арабские ученые аль-Батани (850—929) и Абу-ль-Вефа Мухамед-бен Мухаммед (940—998), который составил таблицы синусов и тангенсов через 1′ с точностью до $1/60^4$. Теорему синусов уже знали индийский ученый Бхаскара (р. 1114, год смерти неизвестен) и азербайджанский астроном и математик Насиреддин Туси Мухамед (1201—1274). Кроме того, Насиреддин Туси в своей работе «Трактат о полном четырехстороннике» изложил плоскую и сферическую тригонометрию как самостоятельную дисциплину.

Теорему тангенсов доказал Региомонтан (латинизированное имя немецкого астронома и математика Иогана Мюллера (1436—1476)). Региомонтан составил также подробные тригонометрические таблицы. Благодаря его трудам плоская и сферическая тригонометрия стала самостоятельной дисциплиной и в Европе.

Дальнейшее развитие тригонометрия получила в трудах выдающихся астрономов Николая Коперника (1473—1543) — творца гелио-

центрической системы мира, Тихо Браге (1546—1601) и Иогана Кеплера (1571—1630), а также в работах математика Франсуа Виета (1540—1603), который полностью решил задачу об определении всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным.

Долгое время тригонометрия носила чисто геометрический характер. Такою она была еще в средние века, хотя иногда в ней использовались и аналитические методы, особенно после появления логарифмов. Постепенно тригонометрия органически вошла в математический анализ, механику, физику и технические дисциплины.

Начиная с XVII в., тригонометрические функции начали применять к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, распространения волн, движения различных механизмов, для изучения переменного электрического тока и т. д. Поэтому тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались и приобрели важное значение для всей математики.

Аналитическая теория тригонометрических функций в основном была создана выдающимся математиком XVIII в. Леонардом Эйлером (1707—1783), членом Петербургской Академии наук.

Таким образом, тригонометрия, возникшая как наука о решении треугольников, со временем развилась и в науку о тригонометрических функциях.

Позднее часть тригонометрии, которая изучает свойства тригонометрических функций и зависимости между ними, начали называть *гониометрией* (в переводе — наука об измерении углов, от греч. $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ — угол, $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\omega$ — измеряю). Термин *гониометрия* в позднее время мало употребляется.

Изучение свойств тригонометрических функций и зависимостей между ними отнесено к школьному курсу алгебры, а решение треугольников — к курсу геометрии.

§ 63. Тригонометрические функции острого угла

В прямоугольном треугольнике, имеющем данный угол α, отношения сторон не зависят от размеров треугольника. Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 320), имеющих равные углы $\angle A = \angle A_1 = \alpha$. Из подобия этих треугольников имеем:

$$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1};\quad \frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1};\quad \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1};\quad \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1};\quad \frac{c}{b} = \frac{c_1}{b_1};\quad \frac{c}{a} = \frac{c_1}{a_1}.$$

Если величину угла α изменить, то написанные равенства остаются справедливыми, а изменится лишь числовое значение отноше-

ний $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ и т. д. Поэтому отношения $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$ можно рассматривать как функции угла α.

1. Определение тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника. *а) Синусом острого угла* называется отношение *противолежащего этому углу катета к гипотенузе* (рис. 321). Обозначают это так:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

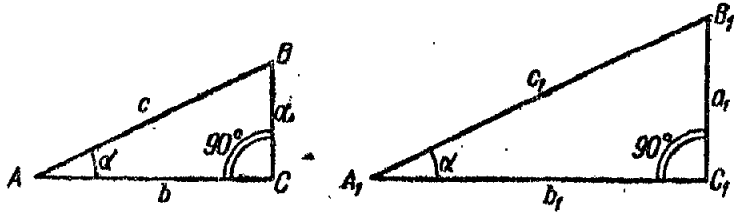


Рис. 320.

б) *Косинусом острого угла* называется отношение *прилежащего к этому углу катета к гипотенузе:*

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

в) *Тангенсом острого угла* называется отношение *противолежащего этому углу катета к прилежащему катету:*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$

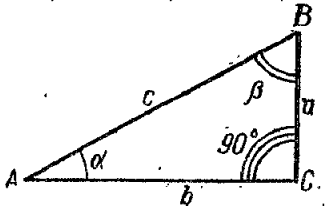


Рис. 321.

г) *Котангенсом острого угла* называется отношение *прилежащего к этому углу катета к противолежащему катету:*

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

д) *Секансом острого угла* называется отношение *гипотенузы к прилежащему к этому углу катету:*

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}.$$

е) *Косекансом острого угла* называется отношение *гипотенузы к противолежащему этому углу катету:*

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

Замечание. Символы sin, cos, tg, ctg, sec, cosec, как и символы lg, $\sqrt{}$, $\lim$, и т. д. сами по себе никакой величины не обозначают. Эти символы обозначают математическое действие и имеют числовой смысл лишь тогда, когда они записаны вместе с символом угла α, т. е. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$.

2. Таблицы натуральных значений тригонометрических функций острого угла. Значения тригонометрических функций (отношений отрезков) являются отвлеченными числами.

Приближенные значения тригонометрических функций острого угла можно найти непосредственно согласно их определениям. Построив прямоугольный треугольник с острым углом α и измерив его стороны, согласно определениям мы можем вычислить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и т. д.

Для углов 30°, 45°, 60° легко найти точные значения тригонометрических функций.

Пользуясь тем, что значения тригонометрических функций не зависят от размеров треугольника, для вычисления значений функций углов $\alpha = 30°$; 45°; 60° рассмотрим прямоугольный треугольник с углом $\alpha = 30°$ и катетом $BC = a = 1$ (рис. 322, а), тогда гипотенуза этого треугольника $c = 2$, а второй катет $b = \sqrt{3}$; рассмотрим также треугольник с углом $\alpha = 45°$ и катетом $a = 1$ (рис. 322, б), тогда для этого треугольника $c = \sqrt{2}$ и $b = 1$.

Из этих треугольников найдем значения тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60°, которые запишем в виде таблицы:

Таблица 5

Функции / α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Приближенные значения тригонометрических функций для углов от 0° до 90° можно получить следующим путем. Построим четверть круга, радиус которого примем за 1, и его дугу разделим на 45 равных частей. Тогда градусная мера каждой части будет равна 2°. Радиусы AM и AN разделим на 100 равных частей (рис. 323). Построим прямоугольный треугольник с вершиной в центре круга и катетом, совпадающим с радиусом AM и гипотенузой $AB = 1$. Если угол $BAC = \alpha$, то по определению тригонометрических функций имеем:

$$\sin\alpha = a; \quad \cos\alpha = b; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Например, на рис. 323 угол $\alpha = 52°$. Для этого значения угла на шкале радиуса AN находим, что $a = 0{,}79$, а на шкале радиуса AM находим, что $b = 0{,}62$, т. е.

$$\sin 52° = 0{,}79; \quad \cos 52° = 0{,}62;$$

$$\operatorname{tg} 52° = \frac{0{,}79}{0{,}62} = 1{,}27;$$

$$\operatorname{ctg} 52° = \frac{0{,}62}{0{,}79} = 0{,}78.$$

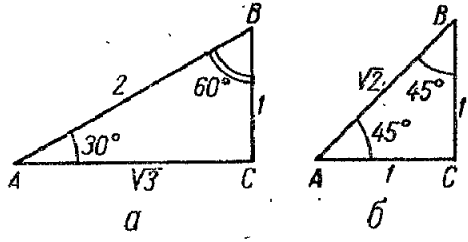


Рис. 322.

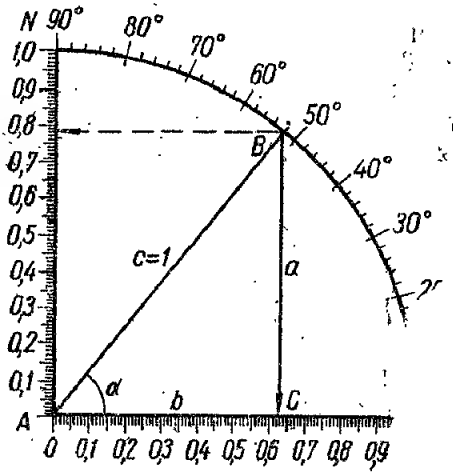


Рис. 323.

Построив аналогичным образом, как это было сделано для $\alpha = 52°$, прямоугольные треугольники для углов $\alpha = 2°$, 4°, 8°, . . . , 88°, согласно рис. 323, найдем значения тригонометрических функций (при аккуратных измерениях и вычислениях) с точностью до 0,01. Для углов $\alpha = 0°$ и 90° прямоугольных треугольников не существует. Однако, если гипотенуза AB будет стремиться по положению к радиусу AM, то угол $\alpha \to 0$, а катеты $a \to 0$ и $b \to 1$. В таком случае для полноты значений тригонометрических функций целесообразно принять, что

$$\sin 0° = a = 0; \quad \cos 0° = b = 1.$$

то касается значений $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, то при $\alpha \to 0$ отношение $\frac{a}{b} \to 0$,

т. е. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{a}{b} = 0$, а отношение $\frac{b}{a}$ при $\alpha \to 0$ неограниченно возра-

. Этот результат записывают так: $\frac{b}{a} \to \infty$, где символ «∞»

ивает, что величина $\frac{b}{a}$ неограниченно возрастает и не может

выражена никаким числом, так как знак «∞» не является

м-либо числом.

Таким образом, целесообразно принять, что $\operatorname{tg} 0° = 0$, а $\operatorname{ctg} 0°$ — уществует, что чаще записывают так: $\operatorname{ctg} 0° = \infty$.

Рассуждая аналогично при $\alpha \to 90°$, прийдем к целесообразности ятия того, что $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{tg} 90°$ не существует $)° = \infty$) и $\operatorname{ctg} 90° = 0$.

Приведем таблицу значений тригонометрических функций для лов от 0° до 90° с шагом в 2°, которую можно получить указанм выше способом, воспользовавшись рис. 323.

Таблица 6

$\alpha\downarrow$ Градусы	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\cos\alpha$	α Градусы
0	0,00	0,00	∞	1,00	90
2	0,03	0,03	28,6	1,00	88
4	0,07	0,07	14,3	1,00	86
6	0,10	0,11	9,51	0,99	84
8	0,14	0,14	7,12	0,99	82
10	0,17	0,18	5,67	0,98	80
12	0,21	0,21	4,70	0,98	78
14	0,24	0,25	4,01	0,97	76
16	0,28	0,29	3,49	0,96	74
18	0,31	0,32	3,08	0,95	72
20	0,34	0,36	2,75	0,94	70
22	0,37	0,40	2,48	0,93	68
24	0,41	0,45	2,25	0,91	66
26	0,44	0,49	2,05	0,90	64
28	0,47	0,53	1,88	0,88	62
30	0,50	0,58	1,73	0,87	60
32	0,53	0,62	1,60	0,85	58
34	0,56	0,67	1,48	0,83	56
36	0,59	0,73	1,38	0,81	54
38	0,62	0,78	1,28	0,79	52
40	0,64	0,84	1,19	0,77	50
42	0,67	0,90	1,11	0,74	48
44	0,69	0,97	1,04	0,72	46
α	$\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\sin\alpha$	$\alpha\uparrow$

Если значительно увеличить размеры рис. 323, то можно было бы найти значения тригонометрических функций для большего числа значений углов и с большей степенью точности, но не выше, чем с тремя-четырьмя значащими цифрами. Однако так не поступают: существуют аналитические методы вычисления значений тригонометрических функций для любых значений углов и с любой степенью точности.

Остановимся кратко на пользовании табл. 6.

Два угла α и $90° - \alpha$ называются дополнительными углами. Легко показать, что сходственные тригонометрические функции (синус и косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс) дополнительных углов равны между собой:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha; \quad \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha; \quad \sec(90° - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha; \quad \operatorname{cosec}(90° - \alpha) = \sec\alpha.$$

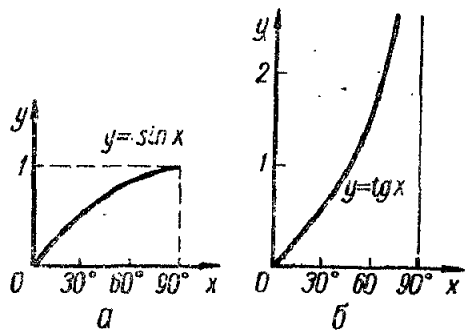


Рис. 324.

Табл. 6 составлена так, что в начале и конце каждой строки стоят дополнительные углы, а в начале и конце каждой колонки таблицы размещены сходственные функции.

Если, например, взять число 0,17, стоящее в 6-й строке 2-й колонки табл. 6, то оно является приближенным значением $\sin 10°$ и $\cos 80°$.

3. Графики тригонометрических функций острого угла. Пользуясь значениями тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, данными в табл. 6, построим их графики (рис. 324 а, б).

Графики функций $y = \cos x$, $y = \operatorname{ctg} x$ предлагаем построить читателю.

4. Основные соотношения между тригонометрическими функциями острого угла. Из прямоугольного треугольника (рис. 321) по теореме Пифагора получаем, что

$$a^2 + b^2 = c^2$$

или

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

По определению $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, тогда*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1}$$

Легко также найти следующие зависимости:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \tag{4}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

Из соотношений (1) — (5), которые называют основными, можно вывести и другие вспомогательные соотношения, например:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1, \tag{6}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha, \tag{7}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha. \tag{8}$$

Соотношения (1) — (8) связывают все тригонометрические функции так, что по значению одной из них для данного острого угла можно найти значения всех остальных функций для этого же угла.

Пример. Найти значения тригонометрических функций угла α, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Решение. Пользуясь соотношением (7), находим:

$$\sec^2\alpha = 4 + 1 = 5 \text{ или } \sec\alpha = \sqrt{5}.$$

Тогда из соотношений (4), (6), (1) и (5) последовательно определяем:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2};$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

5. **Решение прямоугольных треугольников.** *Основными случаями* решения треугольников называются задачи на вычисление элементов

* В данном разделе мы вводим сплошную нумерацию для наиболее важных формул.

треугольника по трем данным основным независимым его элементам. К основным элементам треугольника относят его стороны и углы, из которых только два угла независимы между собой, так как

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ. \qquad (9)$$

В прямоугольном треугольнике один угол известен (прямой угол), поэтому для решения прямоугольного треугольника достаточно задать два каких-либо из основных его элементов, кроме двух острых углов, так как для прямоугольного треугольника

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \quad \left(\gamma = \frac{\pi}{2} = 90^\circ\right) \qquad (9')$$

и, следовательно, если задан один из углов, например, α, то $\beta = 90^\circ - \alpha$, и наоборот, если известен угол β, то $\alpha = 90^\circ - \beta$.

Основные задачи решения прямоугольных треугольников (см. рис. 321).

1. Даны гипотенуза c и острый угол α. В таком случае остальные элементы находятся по формулам:

$$a = c \sin \alpha; \quad b = c \cos \alpha; \quad \beta = 90^\circ - \alpha. \qquad (10)$$

2. Даны катет a и острый угол α (или β). Тогда остальные элементы треугольника находятся по формулам:

$$\beta = 90^\circ - \alpha; \quad b = a \operatorname{ctg} \alpha; \quad c = \frac{a}{\sin \alpha}. \qquad (11)$$

3. Даны гипотенуза c и катет a (или b).
Тогда остальные элементы находятся по формулам:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}; \quad \sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \beta = 90^\circ - \alpha. \qquad (12)$$

4. Даны катеты a и b.
Остальные элементы находятся по формулам:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \beta = 90^\circ - \alpha. \qquad (13)$$

§ 64. Обобщение понятия угла. Измерение дуг и углов

1. Общее определение угла. В геометрии *угол* определяется как фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки. Эти лучи называются *сторонами* угла, а их общая точка — *вершиной* угла. При этом стороны угла считаются равноправными.

Для тригонометрии такое понятие угла недостаточно и его обобщают следующим образом.

Как в случае направленных отрезков различают начальную и конечную точки, так и при обобщении понятия угла различают начальную и конечную стороны.

В некоторой плоскости фиксируют положение луча OA (рис. 325) и называют его *начальной стороной угла*, а второй луч, исходящий из той же точки, вращают в этой плоскости от положения OA до положения OB и его называют *подвижным лучом*, а его конечное положение OB — *конечной стороной угла* AOB, т. е. угол AOB рассматривают как результат вращения луча в плоскости от положения OA до положения OB.

При таком определении угла его величина является мерой вращения конечной его стороны относительно начальной.

Положительным направлением вращения в плоскости называют вращение против движения часовой стрелки, а *отрицательным* — по движению часовой стрелки.

2. Измерение дуг и углов. Для непосредственного измерения дуг и углов, как и отрезков, принимают некоторую определенную дугу (угол) за единицу измерения и при помощи этой единицы измеряют остальные дуги и углы.

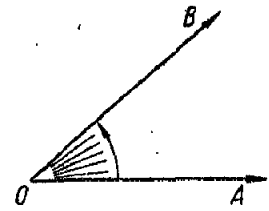


Рис. 325.

Существуют различные единицы измерения дуг и углов: градус, радиан, большое и малое деления, полный оборот, румб и т. д.

Дугу, длина которой равна $\frac{1}{360}$ части длины ее окружности, называют *дугой в один градус*. А угол, равный центральному углу, опирающемуся на дугу в один градус, называют *углом в один градус* (1°).

Дугу, длина которой равна длине радиуса ее окружности, называют *дугой в один радиан*. А угол, равный центральному углу, опирающемуся на дугу в один радиан, называют *углом в один радиан*.

Можно показать, что как градусная, так и радианная мера дуг и углов не зависят от величины радиуса окружности, а зависят только от величины соответствующего центрального угла.

Полный оборот, которому соответствует длина окружности, содержит 360° или $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ радиан*.

---

* Как уже отмечалось в I разделе, при радианном измерении дуг и углов слово «радиан», как правило, не пишут: например, говорят, что прямой угол равен $\frac{\pi}{2}$ или угол равен 2,537, а подразумевают, что «угол равен $\frac{\pi}{2}$ радианам» или «2,537 радианам». Однако это не означает, что при радианном измерении дуг и углов их мера выражается отвлеченными числами. Никакого принципиального различия между градусным и радианным измерением дуг и углов не существует. Различие состоит лишь в выборе единицы измерения.

Таким образом, 360° соответствует 2π радианам. Отсюда получаем формулу перехода от градусной меры дуг и углов к радианной, и наоборот:

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = \frac{\alpha \text{ радианов}}{\pi \text{ радианов}}. \qquad (14)$$

В частности

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ\,17'\,44'',8 = 57^\circ,29578 =$$

$$= 3437',747 = 206264'',8; \qquad (15)$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радианам} \approx 0{,}01745329 \text{ радианам}. \qquad (15')$$

(Для вычисления углов с точностью до 0,1 *сек* значение числа π нужно брать с семью значащими цифрами, т. е. $\pi \approx 3{,}141593$).

Пример 1. Найти радианную меру угла $\alpha = 18^\circ 15'$.

Решение. По формуле (14), взяв $\pi \approx 3{,}1416$, находим ($18^\circ 15' = 18^\circ,25$):

$$\alpha = \frac{\pi \cdot 18^\circ,25}{180^\circ} = 0{,}31852 \text{ радианам}.$$

Пример 2. Найти градусную меру угла $\alpha = 3{,}68$ радиана.

Решение. По формуле (14) находим:

$$\alpha = \frac{3{,}68 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ,296 \cdot 3{,}68 = 210^\circ,849 = 210^\circ 51'.$$

Приведем таблицу градусной и радианной меры часто встречающихся углов:

Углы в градусах	15	30	45	60	75	90	180	270	360
Углы в радианах	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

В конце справочника приведена таблица перехода от градусной меры дуг и углов к радианной, и наоборот.

3. Углы и дуги произвольной величины. Если вектор $\vec{OA}$ (рис. 326а) вращается в плоскости вокруг точки O в положительном направлении, то дуга, описанная концом вектора A, и соответствующий этому вращению угол называются *положительными*, а если вращение вектора $\vec{OA}$ отрицательное (рис. 326б), то соответствующую дугу и угол называют *отрицательными*.

Дуга (угол) измеряется действительным числом, абсолютная величина которого равна величине дуги (угла), взятой со знаком плюс, если дуга (угол) положительна, и со знаком минус — если дуга (угол) отрицательна.

Если горизонтальную полуось $\vec{OA}$ зафиксировать (рис. 327) и считать начальной стороной угла AOB, а подвижный вектор $\vec{OB}$ — конечной стороной этого угла, то вектор $\vec{OB}$, вращаясь в плоскости вокруг своего начала, образует углы любой величины, а его конец B будет описывать дуги любой величины. Положение вектора $\vec{OB}$ не определяет однозначно величину угла AOB. Так, если вектор $\vec{OB}$ вращался

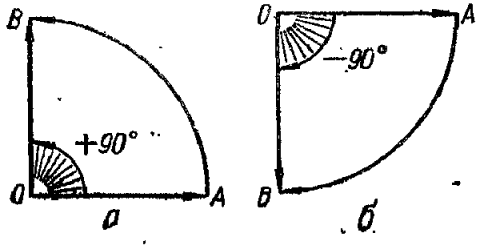


Рис. 326.

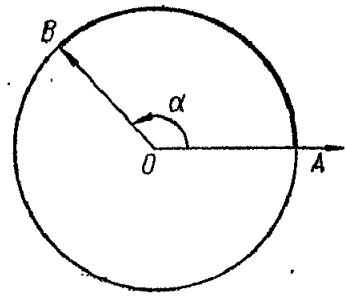


Рис. 327.

вокруг точки O в положительном направлении и не сделал полного оборота, то $\angle AOB = \alpha$, где $0 < \alpha < 360°$, если же вектор $\vec{OB}$ сделал 7 оборотов и поворот на угол α, то

$$\angle BOA = \alpha + 7 \cdot 2\pi = \alpha + 14\pi.$$

Если о числе оборотов ничего не сказано, то угол

$$\angle BOA = \alpha + 2\pi n,$$

где n может быть любым целым положительным и отрицательным числом:

$$n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$$

Таким образом, если специально не оговорено, то угол в тригонометрии задается с точностью до произвольного числа целых оборотов.

§ 65. Тригонометрические функции произвольного угла

1. Определение тригонометрических функций произвольного угла. Пусть в прямоугольной системе координат xOy задан радиус-вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, образующий с положительным направлением оси Ox угол α (рис. 328). Будем считать, что ось Ox — начальная сторона, а вектор $\overrightarrow{OA}$ — конечная сторона угла α. Проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси соответственно обозначим a_x и a_y.

Можно показать, что отношения $\frac{a_x}{a}$, $\frac{a_y}{a}$, $\frac{a_x}{a_y}$, где a — длина вектора $\vec{a}$, зависят только от величины угла α и не зависят от длины вектора $\vec{a}$. Поэтому эти отношения можно рассматривать как функции произвольного угла α.

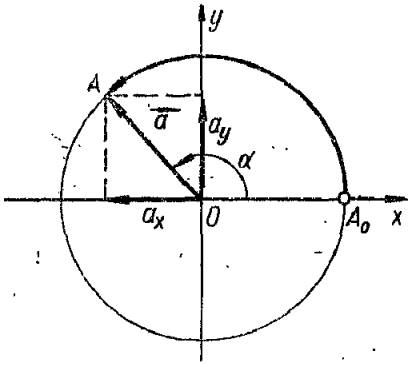


Рис. 328.

Синусом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$ (рис. 328), называется отношение проекции этого вектора на ось Oy к его длине:

$$\sin\alpha = \frac{a_y}{a}. \qquad (16)$$

Косинусом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение проекции этого вектора на ось Ox к его длине:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}. \qquad (17)$$

Тангенсом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение проекции этого вектора на ось Oy к его проекции на ось Ox:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x}. \qquad (18)$$

Котангенсом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение проекции этого вектора на ось Ox к его проекции на ось Oy:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_x}{a_y}. \qquad (19)$$

Секансом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение длины этого вектора к его проекции на ось Ox:

$$\sec\alpha = \frac{a}{a_x}. \tag{20}$$

Косекансом угла α, образованного осью Ox и произвольным радиусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, называется отношение длины этого вектора к его проекции на ось Oy:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{a}{a_y}. \tag{21}$$

Замечание. Если не указано сколько оборотов совершил вектор $\overrightarrow{OA}$ вокруг точки O в плоскости xOy (рис. 328), то положение вектора определяет угол с точностью до целого оборота, т. е. углу с начальной стороной Ox и конечной стороной $\overrightarrow{OA}$ соответствует бесчисленное множество углов, которые выражаются формулой

$$360^\circ \cdot n + \alpha, \text{ где } n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \ldots .$$

Так как для всех этих углов величины a_x, a_y и a остаются неизменными, то

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + 360^\circ \cdot n) &= \sin\alpha;\\
\cos(\alpha + 360^\circ \cdot n) &= \cos\alpha;\\
\operatorname{tg}(\alpha + 360^\circ \cdot n) &= \operatorname{tg}\alpha;\\
\operatorname{ctg}(\alpha + 360^\circ \cdot n) &= \operatorname{ctg}\alpha;\\
\sec(\alpha + 360^\circ \cdot n) &= \sec\alpha;\\
\operatorname{cosec}(\alpha + 360^\circ \cdot n) &= \operatorname{cosec}\alpha.
\end{aligned} \tag{22}$$

2. Знаки тригонометрических функций. Длина радиуса-вектора $|\vec{a}| = a$ всегда число положительное. Проекции его на координатные оси величины алгебраические и в зависимости от координатных четвертей имеют следующие знаки:

в I четверти $a_x > 0;\ a_y > 0;$

во II четверти $a_x < 0;\ a_y > 0;$

в III четверти $a_x < 0;\ a_y < 0;$

в IV четверти $a_x > 0;\ a_y < 0.$

Соответственно тригонометрические функции имеют знаки, которые указаны на рис. 329.

3. Ось тангенсов и котангенсов. Значения тригонометрических функций не зависят от длины подвижного радиуса-вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 328). Для удобства принимают длину радиуса-вектора равной единице, т. е. $|\vec{a}| = 1$. В этом случае

$$\sin\alpha = a_y;\ \cos\alpha = a_x;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a_x}{a_y};\ \sec\alpha = \frac{1}{a_x};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{a_y}.$$

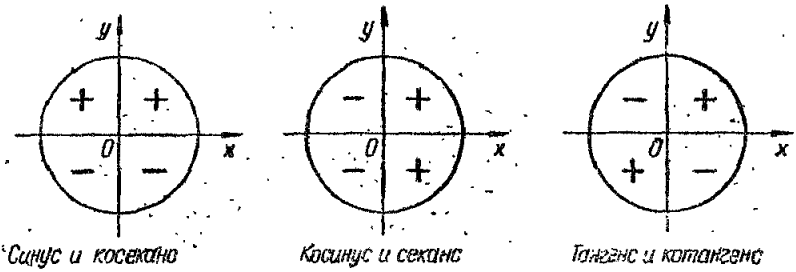


Рис. 329.

Окружность, описанную концом A радиуса-вектора $\vec{a}$, называют *единичной окружностью.*

Касательная к единичной окружности в точке ее пересечения с положительной частью оси абсцисс, направленная одинаково с осью ординат, называется *осью тангенсов* (рис. 330).

Теорема 1. *Тангенс угла* α равен алгебраической величине отрезка оси тангенсов, отсекаемого от нее продолжением вектора $\vec{a}$ (рис. 330).

Касательная к единичной окружности в точке ее пересечения с положительной частью оси ординат, направленная одинаково с осью абсцисс, называется *осью котангенсов* (рис. 331).

Теорема 2. Котангенс угла α равен алгебраической величине отрезка оси котангенсов, отсекаемого от нее продолжением вектора $\vec{a}$ (рис. 331).

4. Построение угла по данному значению его тригонометрической функции.

Задача. Построить угол (дугу) α, синус которого равен m.

Решение. Рассмотрим три случая.

а) Пусть $|m| < 1$. В координатной плоскости xOy строим единичную окружность. На оси ординат находим точку, соответствующую числу m. Через эту точку проводим прямую, параллельную оси абсцисс, и точки пересечения ее с единичной окружностью обозначим через A и B (рис. 332, а). Соединив точки A и B с началом координат,

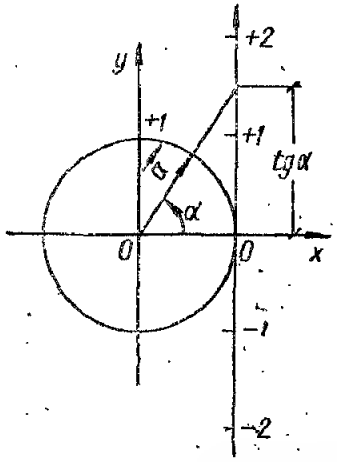


Рис. 330.

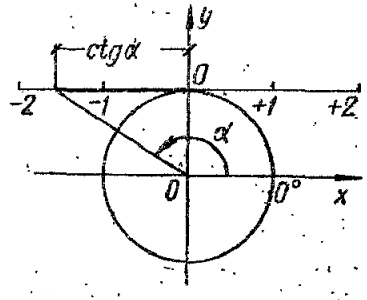


Рис. 331.

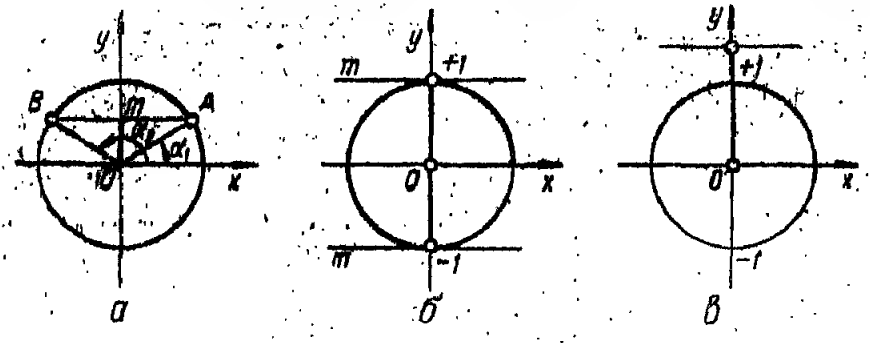


Рис. 332.

получим углы AOx и BOx, синусы которых равны m. Эти углы определяются не однозначно. Обозначим меньший положительный угол, определяемый конечной стороной AO, через $\angle AOx = \alpha_1$, а наименьший положительный угол, определяемый конечной стороной OB, обозначим $\angle BOx = \alpha_2$. Тогда искомый угол α определяется равенствами

$$\alpha = \alpha_1 + 2\pi n \text{ и } \alpha = \alpha_2 + 2\pi n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

б) Если $|m| = 1$, т. е. $m = \pm 1$, тогда прямые, проведенные через точки (0; 1) и (0; —1) оси ординат, перпендикулярные ей, будут касаться единичной окружности в точках, соответствующих наименьшим положительным углам $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, а искомый угол α будет определяться формулами (рис. 332, б)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ и } \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

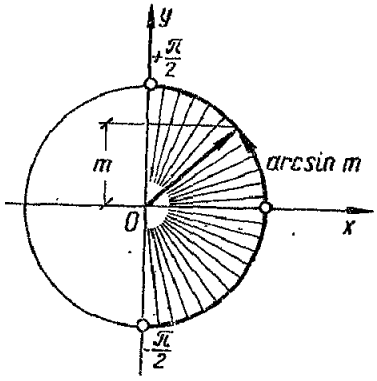


Рис. 333.

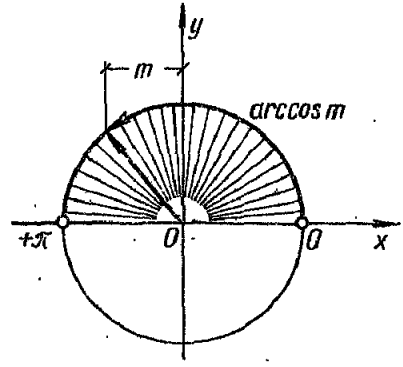


Рис. 334.

в) Если $|m| > 1$, тогда прямая, проведенная через точку $(0, m)$ оси ординат перпендикулярно к ней, не пересекает единичной окружности (рис. 332, в). В этом случае задача решений не имеет.

Таким образом, как следует из решения задачи, данному значению тригонометрической функции соответствует бесчисленное множество значений угла. Для того чтобы подобные задачи были однозначными, из всех этих значений выделяют так называемое главное значение угла.

Главным значением угла (дуги) α_0, синус которого равен числу m ($|m| \leqslant 1$), называют угол (дугу), содержащийся в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ (рис. 333), т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha_0 \leqslant +\frac{\pi}{2}.$$

Для обозначения главного значения угла α_0, синус которого равен $m(|m| \leqslant 1)$, вводят символ:

$$\arcsin m,$$

который читают так: «угол (дуга), синус которого равен m» или сокращенно «арксинус m».

Все углы (дуги), синус которых равен m, обозначают символом:

$$\operatorname{Arcsin} m.$$

При этом все множество различных значений $\operatorname{Arcsin} m$ выражается через соответствующие главные значения по формуле

$$\operatorname{Arcsin} m = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \tag{23}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

Задача построения главного значения угла (дуги) по данному значению тригонометрической функции решается однозначно.

Аналогично вводятся главные значения углов, определяемых заданными значениями функций косинуса, тангенса и котангенса:

а) Главным значением угла (дуги) $\arccos m$ ($|m| \leqslant 1$) называется угол (дуга), содержащийся в интервале от 0 до π (рис. 334), т. е.

$$0 \leqslant \arccos m \leqslant \pi.$$

Тогда все углы (дуги), косинус которых равен m, выражаются формулой

$$\operatorname{Arccos} m = \pm \arccos m + 2\pi n, \tag{24}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

б) Главным значением угла (дуги) $\operatorname{arctg} m$ называется угол (дуга), содержащийся в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ (рис. 335), т. е.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} m < +\frac{\pi}{2}.$$

Все углы (дуги), тангенс которых равен m, выражаются формулой

$$\operatorname{Arctg} m = \operatorname{arctg} m + \pi n, \tag{25}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

в) Главным значением угла (дуги) $\operatorname{arcctg} m$ называется угол (дуга), содержащийся в промежутке от 0 до π (рис. 336), т. е.

$$0 < \operatorname{arcctg} m < \pi.$$

Все углы (дуги), котангенс которых равен m, выражаются формулой

$$\operatorname{Arcctg} m = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \tag{26}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

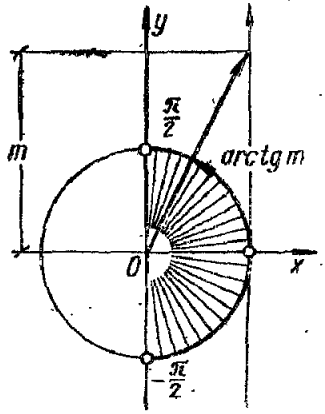


Рис. 335.

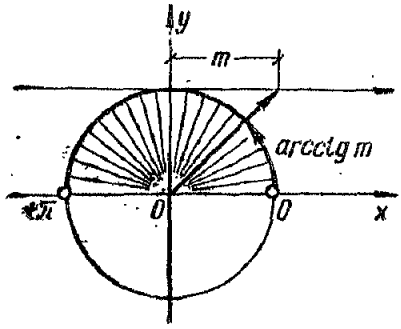


Рис. 336.

§ 66. Основные тригонометрические тождества

Тригонометрическим тождеством называется равенство, в которое входят тригонометрические функции и которое удовлетворяется произвольным допустимым значением угла — аргумента тригонометрических функций, но не удовлетворяется, если каждую в отдельности тригонометрическую функцию заменить произвольной величиной.

Пример. Равенство $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$ по существу не является тригонометрическим тождеством, так как оно будет верным, если вместо $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ подставить произвольные величины a и b. Тогда это равенство будет алгебраическим тождеством

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

А равенство

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$$

является тригонометрическим тождеством, так как при замене $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ на произвольные величины такое равенство места не имеет.

Между тригонометрическими функциями одного и того же про-

извольного угла существуют соотношения, которые называют основными тригонометрическими тождествами:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tag{27}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)\right]; \tag{28}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad [\alpha \neq \pi k]; \tag{29}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)\right]; \tag{30}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad [\alpha \neq \pi k]. \tag{31}$$

Из пяти основных тождеств вытекают три вспомогательных (производных) тождества, которые часто употребляются в преобразованиях:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}k\right]; \tag{32}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha, \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)\right]; \tag{33}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha, \ [\alpha \neq \pi k], \tag{34}$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

В квадратных скобках указаны значения аргумента α, при которых соответствующие тождества имеют числовой смысл. Основные тригонометрические тождества позволяют по значению одной из тригонометрических функций найти значения всех остальных.

Рассмотрим несколько упражнений на основные тригонометрические тождества.

Пример 1. Определить значения тригонометрических функций угла α, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $180° < \alpha < 270°$.

Решение. По формуле (32) находим

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}.$$

По формуле (33) имеем

$$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

или

$$|\sec\alpha| = \frac{5}{4}.$$

Учитывая, что при $180° < \alpha < 270°$ $\sec\alpha < 0$, получаем

$$-\sec\alpha = \frac{5}{4}, \text{ откуда } \sec\alpha = -\frac{5}{4}.$$

Тогда по формуле (30)

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Значение $\sin\alpha$ найдем из формулы (27):

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

или

$$|\sin\alpha| = \frac{3}{5}.$$

Учитывая, что при $180° < \alpha < 270°$ $\sin\alpha < 0$, находим

$$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$$

и, наконец, по формуле (31) определяем

$$\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{3}.$$

Пример 2. Доказать тождество:

$$3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1.$$

Решение. Преобразуем вначале левую часть равенства, а затем, воспользовавшись формулой (27), находим:

$$3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) =$$
$$= 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) =$$
$$= 3\sin^4\alpha + 3\cos^4\alpha - 2\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^4\alpha =$$
$$= \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать тождество:

$$\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) =$$
$$= \sin^3\alpha\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \cos^3\alpha\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$
$$= \sin^2\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) + \cos^2\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) =$$
$$= (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

§ 67. Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha; \tag{35}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha; \tag{36}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \tag{37}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \tag{38}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}(1+2k); \tag{39}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}(1+2k); \tag{40}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta};\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq k\pi; \tag{41}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta};\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq k\pi, \tag{42}$$

где $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \ldots$

Формулы (35) — (38) имеют числовой смысл при всех значениях аргументов α и β, а формулы (39) — (42) теряют смысл при значениях аргументов, отмеченных в этих формулах. Например, формула (39) имеет место, если

$$\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}(1+2k),\ \text{где}\ k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$$

Заметим, что при $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}(1+2k)$ будем иметь

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

и тогда

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0,$$

т. е. при этом значении аргументов α и β знаменатель в формуле (39) обращается в нуль.

Формулы (35) — (42) позволяют определять по известным тригонометрическим функциям аргументов α и β значения этих функций для сумм или разностей заданных аргументов.

Рассмотрим несколько примеров на формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций.

Пример 1. Вычислить $\sin 15°$.

Решение. Известно, что $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ и $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда по формуле (36) получаем:

$$\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ$$

или

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0{,}258819045\ldots$$

Пример 2. Доказать, что если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$, причем α и β острые углы, то $\alpha + \beta = 45^\circ$.

Решение. Вычислим для заданных α и β по формуле (39)

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

Отсюда, поскольку по условию углы α и β острые, то $\alpha + \beta = 45^\circ$.

Пример 3. Доказать тождество:

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (\alpha + \beta).$$

Решение. Рассмотрим левую часть тождества и вынесем в ней за скобки $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$, тогда, воспользовавшись формулой (39), имеем

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\alpha + \beta) \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\alpha + \beta)} \right] =$$

$$= \operatorname{tg} (\alpha + \beta) \left[1 - \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \right] = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (\alpha + \beta),$$

что и требовалось доказать.

§ 68. Формулы приведения

Формулы, при помощи которых тригонометрические функции произвольного угла можно привести к функциям острого угла, называют *формулами приведения*. Поэтому таблица значений тригонометрических функций составляется только для углов α, лежащих в первом квадранте, т. е. для

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь формулами сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций и полагая в них последовательно $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$, $\beta = \frac{3\pi}{2}$, $\beta = 2\pi$, легко получить следующие формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = +\cos\alpha; \quad \sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos\alpha; \quad \sin(2\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha; \tag{43}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha; \quad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\sin\alpha; \quad \cos(2\pi \pm \alpha) = +\cos\alpha; \tag{44}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{ctg}\alpha; \quad \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha; \tag{45}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{tg}\alpha; \quad \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{ctg}\alpha. \tag{46}$$

Если учесть, что прибавление целого числа оборотов 360° или $2\pi n$, где n целое число, к аргументу тригонометрических функций на значение функции не влияет, то, пользуясь этим свойством и формулами (43) — (46), любую тригонометрическую функцию произвольного угла можно привести к функции острого угла.

Для приведения тригонометрических функций произвольного угла к функциям острого угла удобно представлять произвольный угол в виде $90° \cdot n + \alpha$, тогда:

$$\sin(90° \cdot n + \alpha) = \begin{cases} +\sin\alpha, & \text{если } n = 4k; \\ +\cos\alpha, & \text{если } n = 4k+1; \\ -\sin\alpha, & \text{если } n = 4k+2; \\ -\cos\alpha, & \text{если } n = 4k+3; \end{cases} \tag{47}$$

$$\cos(90° \cdot n + \alpha) = \begin{cases} +\cos\alpha, & \text{если } n = 4k; \\ -\sin\alpha, & \text{если } n = 4k+1; \\ -\cos\alpha, & \text{если } n = 4k+2; \\ +\sin\alpha, & \text{если } n = 4k+3; \end{cases} \tag{48}$$

$$\operatorname{tg}(90° \cdot n + \alpha) = \begin{cases} +\operatorname{tg}\alpha, & \text{если } n = 2k; \\ -\operatorname{ctg}\alpha, & \text{если } n = 2k+1; \end{cases} \tag{49}$$

$$\operatorname{ctg}(90° \cdot n + \alpha) = \begin{cases} +\operatorname{ctg}\alpha, & \text{если } n = 2k; \\ -\operatorname{tg}\alpha, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases} \tag{50}$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Из формул (47) — (50) вытекает следующее правило. Любая тригонометрическая функция угла $90° \cdot n \pm \alpha$ по абсолютной величине равна той же функции угла α, если число n — четное, и сходственной функции, если n — число нечетное. При этом, если функция угла $90° \pm \alpha$ положительна, когда α — острый угол, то знаки обеих функций одинаковы; если отрицательна, то различны.

Пример. Привести $\operatorname{tg} 3728°$ к функции острого угла.

Решение. Представим угол $3728° = 90° \cdot 41 + 38°$, тогда согласно формуле (49)

$$\operatorname{tg}(90° \cdot 41 + 38°) = -\operatorname{ctg} 38°.$$

Два угла, сумма которых равна 90°, называются *дополнительными* углами. Например, $90° - \alpha$ и α, $45° + \alpha$ и $45° - \alpha$ или $60° + \alpha$ и $30° - \alpha$.

Сходственные функции дополнительных углов равны между собой, например,

$$\sin(45° + \alpha) = \cos(45° - \alpha);$$
$$\operatorname{tg}(45° + \alpha) = \operatorname{ctg}(45° - \alpha);$$
$$\sin(60° + \alpha) = \cos(30° - \alpha);$$
$$\sin(30° - \alpha) = \cos(60° + \alpha).$$

Эти формулы вместе с формулами приведения позволяют привести любую тригонометрическую функцию произвольного угла к функции положительного угла α, не превышающего 45°.

§ 69. Четность и нечетность тригонометрических функций

Известно, что функция $f(x)$ называется нечетной на отрезке $[-a, +a]$, если при всех x из этого отрезка имеет место равенство:

$$f(-x) = -f(x) \tag{51}$$

и — четной, если

$$f(-x) = +f(x). \tag{52}$$

Из тригонометрических функций $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ — нечетные, а $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ — четные, т. е.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \tag{53}$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha; \tag{54}$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \tag{55}$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \tag{56}$$
$$\sec(-\alpha) = +\sec\alpha; \tag{57}$$
$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha. \tag{58}$$

Эти формулы справедливы при всех значениях аргумента α, при которых функции существуют и позволяют любую функцию отрицательного аргумента привести к функции положительного аргумента. Заметим, что эти формулы можно доказать при помощи формул сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций. Например,

$$\sin(-\alpha) = \sin(0^\circ - \alpha) = \sin 0^\circ \cos\alpha - \cos 0^\circ \sin\alpha = -\sin\alpha,$$

т. е.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

§ 70. Формулы двойных и тройных углов (аргументов)

Из формул сложения аргументов тригонометрических функций при $\alpha = \beta$ получаем следующие формулы удвоения аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \tag{59}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \tag{60}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{61}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{62}$$

Если формулы (27) и (60)

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha,$$

сначала вычесть одну из другой, а затем сложить, то получим следующие две формулы, которые часто употребляются при различных тригонометрических преобразованиях:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \tag{63}$$

и

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \tag{64}$$

Путем последовательного применения формул сложения аргументов тригонометрических функций можно получить формулы для 3α, 4α и т. д. Приведем формулы для тройных углов:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \tag{65}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \tag{66}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{67}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}. \tag{68}$$

Рассмотрим несколько упражнений на формулы кратных углов.

Пример 1. Доказать, что

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}.$$

Решение. Умножим и разделим левую часть данного равенства на $\sin\alpha$ и применим 4 раза подряд формулу (59), представив ее в виде $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Тогда

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \frac{(\sin\alpha\cos\alpha)\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 2\alpha\cos 2\alpha)\cos 4\alpha\cos 8\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{4}(\sin 4\alpha\cos 4\alpha)\cos 8\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\sin 8\alpha\cos 8\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin 16\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что если $16\alpha + \alpha = \pi$, то $\frac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha} = \frac{1}{16}$, т. е.

$$\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{1}{16}.$$

Пример 2. Доказать, что

$$\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства

$$\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) =$$

$$= \sin\alpha(\sin 60^\circ\cos\alpha - \cos 60^\circ\sin\alpha)(\sin 60^\circ\cos\alpha + \cos 60^\circ\sin\alpha) =$$

$$= \sin\alpha(\sin^2 60^\circ\cos^2\alpha - \cos 60^\circ\sin^2\alpha) = \sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{1}{4}\sin\alpha[3(1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha] =$$

$$= \frac{1}{4}(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать тождества:

$$\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}3\alpha.$$

Пример 3. Упростить

$$A=\operatorname{tg}3^\circ\operatorname{tg}17^\circ\operatorname{tg}23^\circ\operatorname{tg}37^\circ\operatorname{tg}43^\circ\operatorname{tg}57^\circ\operatorname{tg}63^\circ\operatorname{tg}77^\circ\operatorname{tg}83^\circ.$$

Представим данное выражение в виде

$$A=(\operatorname{tg}3^\circ\operatorname{tg}57^\circ\operatorname{tg}63^\circ)(\operatorname{tg}17^\circ\operatorname{tg}43^\circ\operatorname{tg}77^\circ)(\operatorname{tg}23^\circ\operatorname{tg}37^\circ\operatorname{tg}83^\circ)$$

и воспользуемся тождеством для тангенсов из примера 2, тогда

$$A=\operatorname{tg}9^\circ\operatorname{tg}51^\circ\operatorname{tg}69^\circ=\operatorname{tg}27^\circ.$$

Ответ: $A=\operatorname{tg}27^\circ$.

Пример 4. Вычислить $\sin 18^\circ$.

Решение. Воспользуемся тождеством:

$$\sin 36^\circ=\cos 54^\circ.$$

Обозначив $18^\circ=\alpha$, находим, что в данном случае

$$\sin 2\alpha=\cos 3\alpha$$

или

$$2\sin\alpha\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Так как $\cos\alpha\neq 0$, то, сократив это равенство на $\cos\alpha$, имеем

$$2\sin\alpha=4\cos^2\alpha-3=4(1-\sin^2\alpha)-3,$$

откуда

$$4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0.$$

Решая это уравнение относительно $\sin\alpha$, найдем

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\quad\text{или}\quad\sin\alpha=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}.$$

Так как в первом квадранте $\sin\alpha>0$, то второе значение не подходит.

Ответ: $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=0{,}30901699\ldots$

§ 71. Формулы половинного аргумента

Формулы деления аргумента пополам выражают тригонометрические функции половинного аргумента $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции аргумента α.

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \tag{69}$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \tag{70}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \qquad \alpha \neq \pi(2k+1); \tag{71}$$

$$\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}; \qquad \alpha \neq 2k\pi; \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \tag{72}$$

Для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ иногда удобнее пользоваться формулами:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \alpha \neq \pi(2k+1); \tag{73}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}; \qquad \alpha \neq 2k\pi; \quad k = 0; \pm 1; \ldots \tag{74}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $180° < \alpha < 270°$.

Решение: а) По формуле (69) находим:

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Учитывая, что $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ при $180° < \alpha < 270°$, т. е. $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$, получаем, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}3\sqrt{10} \approx 0{,}948683.$$

б) По формуле (70) находим:

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда, учитывая, что при $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$ $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, имеем:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \approx -0{,}316228.$$

Пример 2. Доказать, что

$$\operatorname{tg} 7°30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 \approx 0{,}13165249.$$

Решение. Применяя сначала формулу (73), а затем формулы (69) и (70), получаем:

$$\operatorname{tg} 7°30' = \frac{1-\cos 15°}{\sin 15°} = \frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} -$$

$$-(2+\sqrt{3}) = \sqrt{8+4\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3} = \sqrt{8+2\sqrt{12}} - 2 - \sqrt{3} =$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что для вычисления $\sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ была применена формула

$$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b},$$

которой часто приходится пользоваться при преобразовании иррациональных выражений.

Пример 3. Доказать, что

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 15°}{1+\operatorname{tg}^2 15°} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой (71), получаем

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}=\frac{1-\dfrac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}{1+\dfrac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

что и требовалось доказать.

§ 72. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]; \tag{75}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]; \tag{76}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \tag{77}$$

Рассмотрим несколько примеров.

П р и м е р 1. Упростить выражение

$$A=\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$A=(\sin 3\alpha\sin\alpha)\sin^2\alpha+(\cos 3\alpha\cos\alpha)\cos^2\alpha.$$

Воспользовавшись теперь формулами (76), (77) и (64), находим:

$$A=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)\sin^2\alpha+\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)\cos^2\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2\alpha\,(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\frac{1}{2}\cos 4\alpha\,(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 4\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\cos 2\alpha\,(1+\cos 4\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\alpha=\cos^3 2\alpha.$$

Заметим, что при решении этого примера можно было воспользоваться формулами $\sin 3\alpha$ и $\cos 3\alpha$.

Пример 2. Упростить выражение

$$A = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots + \cos[\alpha+(n-1)\beta] + \cos(\alpha+n\beta),$$

где n — натуральное число, т. е. любое целое и положительное число.

Решение. Если $\beta \neq 2k\pi$, где k — целое число или 0, то умножим и разделим обе части выражения A на $\sin\frac{\beta}{2}$, тогда получим:

$$A = \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\left\{\sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+\beta) + \sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+2\beta) + \right.$$

$$\left. + \cdots + \sin\frac{\beta}{2}\cos[\alpha+(n-1)\beta] + \sin\frac{\beta}{2}\cos(\alpha+n\beta)\right\}.$$

Преобразуя при помощи формулы (75) произведения синусов на косинусы в сумму, найдем:

$$A = \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right) - \right.$$

$$-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right) - \sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right) + \cdots +$$

$$+ \sin\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right) - \sin\left(\alpha+\frac{2n-3}{2}\beta\right) + \sin\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right) -$$

$$\left. - \sin\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}\left[\sin\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}\beta\right) - \sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\right] = \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}} \times$$

$$\times 2\sin\frac{n+1}{2}\beta\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right) = \frac{\sin\frac{(n+1)\beta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Если $\beta = 2k\pi$, тогда, воспользовавшись формулами приведения, получим:

$$A = (n+1)\cos\alpha.$$

Ответ:

$$A=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\beta}{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{n}{2}\beta\right)}{\sin\dfrac{\beta}{2}}, & \text{если } \beta\neq 2k\pi;\\ (n+1)\cos\alpha, & \text{если } \beta=2k\pi,\end{cases}$$

где $k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

Пример 3. Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

Решение. Умножив и разделив левую часть равенства на $\sin\frac{\pi}{7}$, получим:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Упражнение. Проверьте формулы (75) — (77), преобразовав их правые части при помощи формул (35) — (38) § 67.

§ 73. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведения

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad(78)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};\qquad(79)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad(80)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \quad (81)$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad (82)$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad (83)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}; \quad (84)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}. \quad (85)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Доказать тождество:

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Решение. Перегруппировав в левой части тождества слагаемые в числителе и знаменателе, а затем, воспользовавшись формулами (78) и (80), найдем

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \frac{\sin 3\alpha + (\sin\alpha + \sin 5\alpha)}{\cos 3\alpha + (\cos\alpha + \cos 5\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin 3\alpha + 2\sin 3\alpha\cos(-2\alpha)}{\cos 3\alpha + 2\cos 3\alpha\cos(-2\alpha)} = \frac{\sin 3\alpha(1+2\cos 2\alpha)}{\cos 3\alpha(1+2\cos 2\alpha)} = \operatorname{tg} 3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать тождество:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right) = \sin\alpha.$$

Решение. Преобразуем левую часть тождества следующим образом:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right) =$$

$$= \left[\cos\left(\frac{3\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{10}+\alpha\right)\right] - \left[\cos\left(\frac{\pi}{10}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{10}+\alpha\right)\right] =$$

$$= 2\sin\frac{3\pi}{10}\sin\alpha - 2\sin\frac{\pi}{10}\sin\alpha = 2\sin\alpha\left(\sin\frac{3\pi}{10} - \sin\frac{\pi}{10}\right) =$$

$$= 2\sin\alpha \cdot 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10} = \frac{4\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cdot\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\alpha\sin\frac{4\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)}{\cos\frac{\pi}{10}} = \sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать, что

$$4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ.$$

Решение. Преобразуем

$$4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 4(\cos 20^\circ \cos^2 20^\circ + \cos 40^\circ \cos^2 40^\circ) =$$

$$= 4\left(\cos 20^\circ \frac{1+\cos 40^\circ}{2} + \cos 40^\circ \frac{1+\cos 80^\circ}{2}\right) =$$

$$= 2\left[\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)\right] = 2\cos 20^\circ + 2\cos 40^\circ + \frac{1}{2} + \cos 20^\circ - \frac{1}{2} +$$

$$+ \cos 40^\circ = 3(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ) = 6\cos 30^\circ \cos 10^\circ = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ.$$

Пример 4. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

Решение. По условию $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, тогда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(\pi-\gamma) = -\operatorname{tg}\gamma.$$

Воспользовавшись теперь формулой (39) § 67, имеем

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Исследуйте, будет ли доказанное тождество справедливо в частном случае, когда $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Пример 5. Доказать, что если α, β, γ — острые углы и $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 1$, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Решение. Преобразуем данное в условии равенство следующим образом:

$$\operatorname{ctg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = 1 - \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma.$$

Тогда

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}$$

или, согласно формулам (41) и (46),

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}(\beta + \gamma) = \operatorname{ctg}(\pi - \beta - \gamma).$$

Так как по условию углы α, β, γ острые, то

$$\alpha = \pi - \beta - \gamma$$

или

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180°,$$

что и требовалось доказать.

§ 74. Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \tag{86}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \tag{87}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \tag{88}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \tag{89}$$

Формулы (86) — (89) находят, в частности, широкое применение в интегральном исчислении.

§ 75. Преобразование тригонометрических выражений с помощью введения вспомогательного аргумента

Рассматриваемый прием заключается в том, что некоторое число представляют как тригонометрическую функцию соответствующего аргумента φ. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Пусть требуется преобразовать в произведение сумму $A+B$, где A и B — произвольные действительные числа. Вынесем A за скобки и обозначим $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}\varphi$, тогда

$$A+B=A\left(1+\frac{B}{A}\right)=A(1+\operatorname{tg}\varphi)=$$

$$=A\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\varphi\right)=A\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\varphi}=\frac{A\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi},$$

где величина вспомогательного аргумента φ определяется по заданному значению тангенса:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{B}{A}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение $A=a\sin\alpha+b\cos\alpha$. Подберем такие положительные числа ρ и φ, чтобы имели место равенства

$$\begin{cases}\rho\cos\varphi=a,\\ \rho\sin\varphi=b.\end{cases}$$

Возведем обе части каждого из уравнений системы в квадрат и сложим, тогда

$$\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=a^2+b^2,$$

откуда

$$\rho=+\sqrt{a^2+b^2}.$$

Значит,

$$\cos\varphi=\frac{a}{\rho}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \sin\varphi=\frac{b}{\rho}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Последние равенства определяют вспомогательный аргумент φ.

Подставляя в выражение для A вместо $a=\rho\cos\varphi$ и $b=\rho\sin\varphi$, найдем:

$$A=a\sin\alpha+b\cos\alpha=\rho(\cos\varphi\sin\alpha+\cos\alpha\sin\varphi)=\rho\sin(\alpha+\varphi)$$

или

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin (\alpha + \varphi),$$

где φ определяется из равенств

$$\cos \varphi = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} \text{ и } \sin \varphi = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Можно также величину вспомогательного аргумента φ определить из уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

а затем из всех его возможных корней выбрать тот наименьший корень, который дает соответствующие знаки заданным величинам

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi, \text{ где } \rho = \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Например, если $a < 0$ и $b > 0$, то φ надо взять во второй четверти, так как только в этом случае $\cos \varphi < 0$ и $\sin \varphi > 0$, что и обеспечит требуемые знаки для заданных величин a и b, поскольку ρ всегда положительное.

§ 76. Тригонометрические функции абстрактного аргумента

До сих пор аргументами тригонометрических функций рассматривались именованные величины — углы (дуги), измеренные в градусах или радианах. Значения тригонометрических функций, как отношения отрезков, являются абстрактными величинами (числами). При изучении свойств тригонометрических функций приходится сравнивать изменения функции в связи с изменением аргумента, а сравнивать можно только однородные или, что еще лучше, абстрактные величины.

Кроме того, введение тригонометрических функций от абстрактного аргумента дает возможность применять эти функции в различных вопросах математики, физики, техники и т. д.

Понятие абстрактного аргумента можно ввести следующим образом.

Вместо именованного значения аргумента тригонометрических функций в x (радианов) рассматривать абстрактное число: $\frac{x \text{ радианов}}{1 \text{ радиан}} = x$ и по определению принять, что $\sin x$, где x — абстрактное число, равен $\sin x$, где x измерен в радианах.

Аналогично определяются другие тригонометрические функции абстрактного (числового) аргумента. Для тригонометрических функций абстрактного аргумента можно дать такое определение:

Тригонометрические функции абстрактного аргумента x — это одноименные тригонометрические функции угла в x радианов.

§ 77. Периодичность тригонометрических функций

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число a, отличное от нуля, такое, что при любом целом n тождественно (т. е. при любом значении x) выполняется равенство:

$$f(x + na) = f(x), \quad n = 0; \ \pm 1; \ \pm 2; \ \ldots \tag{90}$$

Число a называется *периодом* функции.

Если число a есть период функции, то и числа $2a$, $3a$, $4a$ и т. д. также будут периодами этой функции. Как правило, периодом называют наименьшее из возможных положительных значений числа a. Иногда это значение называют основным периодом.

Период функций $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π. Для этих функций имеют место формулы:

$$\begin{gathered} \sin(x + 2\pi n) = \sin x, \\ \cos(x + 2\pi n) = \cos x, \\ \text{где } n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2; \ \ldots \end{gathered} \tag{91}$$

Период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ равен π, т. е.

$$\begin{gathered} \operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x, \end{gathered} \tag{92}$$

где $n = 0; \ \pm 1; \ \pm 2; \ \ldots$

Свойство периодичности тригонометрических функций позволяет изучать их на отрезке, длина которого равна основному периоду.

§ 78. График и некоторые свойства функции $y = \sin x$

1. Построение графика функции $y = \sin x$. График функции $y = \sin x$ называют *синусоидой* (обыкновенной). Для построения графика можно взять значения аргумента x с определенным интервалом и составить таблицу значений $y = \sin x$, соответствующих выбранным значениям x, а затем по точкам, как это часто делается в алгебре, построить график.

Приведем здесь геометрический способ построения графика функции $y = \sin x$.

Строим в системе координат $x_1O_1y_1$ единичную окружность $R = 1$ с центром O_1 на оси абсцисс x_1 (рис. 337). Дугу этой окружности $2\pi R = 2\pi$, начиная от точки оси абсцисс $x_1 = +1$, делим на n равных частей: $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \frac{8\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ (на рис. 337 взято $n = 12$).

Затем строим вторую систему координат xOy, ось которой Ox совпадает с осью O_1x_1, но начала координат O_1 ($x_1 = 0$) и O ($x = 0$) у этих систем различные. В новой системе координат отрезок оси абсцисс от $x = 0$ до $x = 2\pi$ делим также на n равных частей: $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, 2\pi$. Из точек деления окружности проводим прямые,

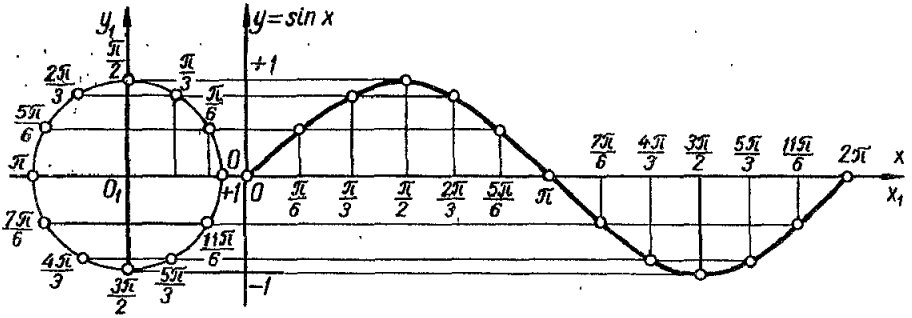


Рис. 337.

параллельные оси Ox, а из точек деления отрезка $[0, 2\pi]$ проводим прямые, перпендикулярные этой оси. Точки пересечения соответствующих прямых будут точками графика $y = \sin x$, так как ординаты этих точек равны значениям синуса, соответствующим значениям аргумента в точках деления отрезка $[0, 2\pi]$.

Пользуясь периодичностью функции $\sin x$ легко продолжить график этой функции на всю числовую ось (см. рис. 342).

2. Простейший синусоидограф. *Синусоидографом* называют прибор, с помощью которого можно начертить график функции синус.

Рассмотрим прямой круговой цилиндр, радиус которого $r = 1$ (рис. 338). Пересечем его двумя плоскостями, одна из которых P_1 перпендикулярна оси цилиндра, а вторая P_2 образует с плоскостью P_1 угол $\beta = 45°$.

Плоскость P_1 в сечении с цилиндром дает окружность $AMCE$, плоскость P_2 пересекает цилиндр по замкнутой кривой, которую называют эллипсом (см. § 57). Плоскости P_1 и P_2 пересекаются по прямой AC, являющейся диаметром окружности $AMCE$. Найдем величину отрезка образующей цилиндра $y = MB$, который лежит между плоскостями P_1 и P_2.

Величина $y = MB$ является переменной и зависит от положения точки M на окружности $AMCE$. Положение точки M будем определять при помощи центрального угла $\alpha = \angle MOA$, который образуют радиусы OA и OM. Величину $y = MB$ определим из треугольника QMB. В этом треугольнике угол QMB прямой, потому что образующая MB перпендикулярна к плоскости P_1. Острый угол $BQM = \beta = 45°$, так как BQ и MQ перпендикулярны к AC — линии пересечения плоскостей P_1 и P_2. Тогда $BM = MQ$. Из треугольника OMQ по определению тригонометрических функций находим:

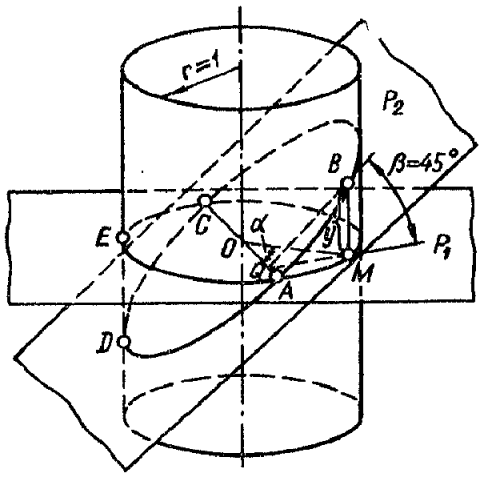


Рис. 338.

$$MQ = r \sin \alpha = 1 \cdot \sin \alpha.$$

Учитывая, что $MQ = MB$, получаем:

$$y = MB = \sin \alpha.$$

Таким образом, отрезок образующей кругового цилиндра, заключенный между плоскостями P_1 и P_2, составляющими угол в 45°, равен синусу центрального угла α, который определяет положение рассматриваемой образующей.

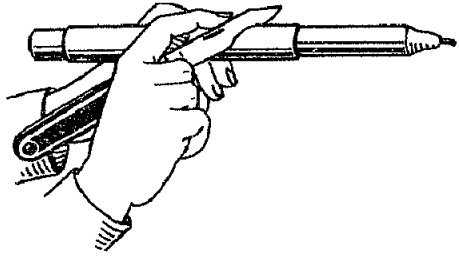


Рис. 339.

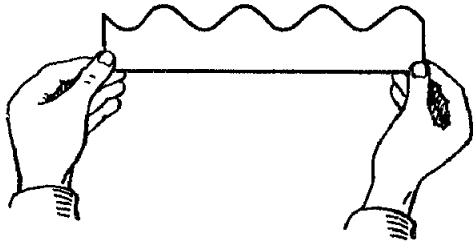


Рис. 340.

Теперь можно воспользоваться полученными результатами для построения синусоиды. Проще всего взять свечу, обмотать ее бумагой несколько раз и перерезать острым ножом под углом 45° к ее оси (рис. 339). Развернув бумагу, получим на ней синусоиду* (рис. 340).

* Рисунки 339 и 340 заимствованы из книги Г. Штейнгауза, Математический калейдоскоп, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

По этому же принципу можно построить синусоидограф. Возьмем деревянный круговой цилиндр диаметром 3—5 *см* и сделаем на нем острым ножом треугольную выемку глубиной в 1 *мм* вдоль той линии, по которой плоскость P_2 пересекала бы цилиндр. Вдоль сделанной выемки обвяжем цилиндр медной проволокой диаметром приблизительно в 1 *мм* и закрепим его плоскогубцами (рис. 341). При этом проволока должна немного выступать над поверхностью цилиндра. Место скручивания проволоки следует пропаять и зачистить напильником с таким расчетом, чтобы место скручивания несколько возвышалось над проволокой. При вычерчивании синусоиды это возвышение будет отмечать периоды функции.

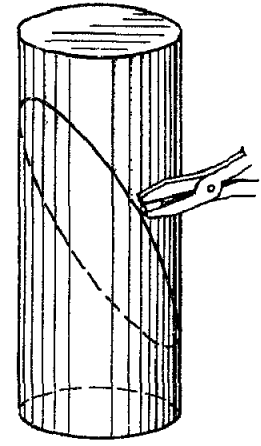


Рис. 341.

Чтобы начертить синусоиду, нужно положить синусоидограф на лист чистой бумаги, и, надавливая на концы цилиндра, прокатить его по бумаге. Тогда проволока, которая выступает над поверхностью цилиндра и реализует линию пересечения цилиндра с плоскостью P_2, оставит на бумаге след в виде кривой $y = \sin x$. Чтобы сделать этот след более четким, можно на чистую бумагу предварительно положить лист копировальной бумаги и катить цилиндр по ней. При этом периодичность синусоиды будет выявляться наиболее четко, так как цилиндр можно катить как угодно далеко.

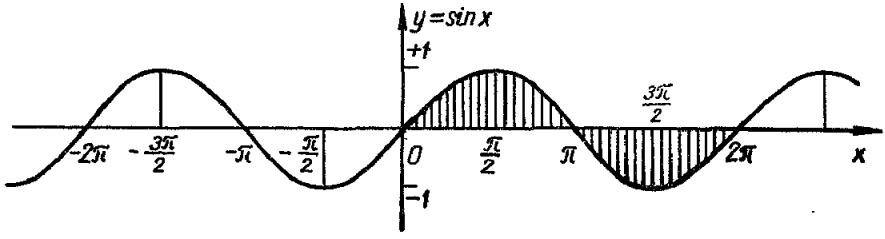


Рис. 342.

3. Некоторые свойства функции $y = \sin x$. а) Непрерывность функции $\sin x$. Функция $y = \sin x$ существует при всех действительных значениях x, причем график ее является сплошной кривой линией (без разрывов), т. е. функция $\sin x$ непрерывна*.

* Строгое определение и доказательство непрерывности функции $y = \sin x$ рассматривается в курсах высшей математики.

б) Функция $y = \sin x$ нечетная и ее график симметричный относительно начала координат (рис. 342).

в) Наибольшие и наименьшие значения. Все возможные значения функции $\sin x$ ограничены неравенствами

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant +1,$$

причем $\sin x = +1$, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

и $\sin x = -1$, если $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$,

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

г) Нулевые значения (точки пересечения графика функции с осью абсцисс). $\sin x = 0$, если $x = \pi n$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$.

д) Интервалы возрастания и убывания. Функция $\sin x$ возрастает, т. е. бо́льшему значению аргумента соответствует большее значение функции на интервалах

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$$

и убывает, т. е. бо́льшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции на интервалах

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

§ 79. График и некоторые свойства функции $y = \cos x$

1. График функции $y = \cos x$ легко получить из графика функции $y = \sin x$.

При любом x, согласно формуле (43) § 68, имеем

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, вместо значения косинуса можно взять значение синуса, увеличив аргумент на $\frac{\pi}{2}$, т. е. графиком функции $y = \cos x$ служит та же синусоида, но передвинутая на $\frac{\pi}{2}$ влево по оси абсцисс (рис. 343).

График функции $y = \cos x$ называют *косинусоидой*.

2. Некоторые свойства функции $y=\cos x$. а) Область определения и непрерывность. Функция $y=\cos x$ определена при всех действительных значениях x и непрерывна.

б) Функция $\cos x$ — четная и ее график симметричный относительно оси ординат.

в) Наибольшие и наименьшие значения. Все возможные значения функции $\cos x$ ограничены неравенствами

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant +1,$$

причем $\cos x = +1$, если $x = 2\pi n$ $(n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$

и $\cos x = -1$, если $x = (2n+1)\pi$ $(n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$.

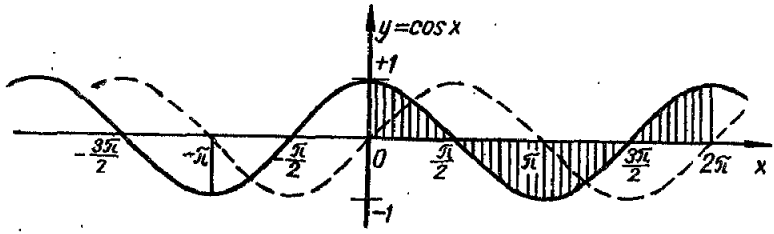


Рис. 343.

г) Нулевые значения (точки пересечения графика функции с осью абсцисс).

$$\cos x = 0, \text{ если } x = \frac{\pi}{2}(2n+1) \quad (n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

д) Интервалы возрастания и убывания. Функция $\cos x$ возрастает на интервалах

$$\pi + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi(n+1) \qquad (n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$$

и убывает на интервалах

$$2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n \qquad (n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

§ 80. График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

1. График функции $y=\operatorname{tg} x$. Подобно тому как была построена синусоида, может быть построен график функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 344).

График функции $y=\operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*.

2. Некоторые свойства функции $y = \operatorname{tg} x$. а) Область определения и непрерывность. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} \times (2n + 1)$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$ или на промежутках

$$\frac{\pi}{2}(2n - 1) < x < \frac{\pi}{2}(2n + 1).$$

В точках $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ функция $\operatorname{tg} x$ не существует $(\operatorname{tg} x = \pm \infty)$, и говорят, что в этих точках она терпит разрыв, т. е. функция $\operatorname{tg} x$

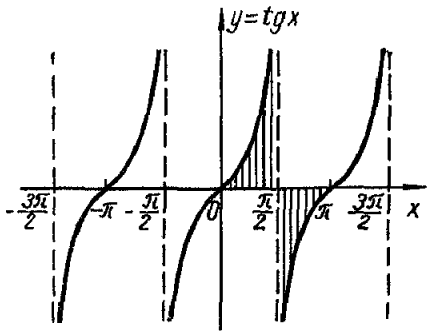


Рис. 344.

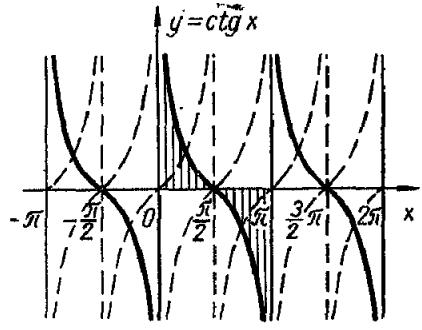


Рис. 345.

не является непрерывной. Ее график будет сплошным (непрерывным) только на промежутках ее определения, а не на всей числовой оси.

б) Функция $\operatorname{tg} x$ — нечетная и ее график симметричный отиосительно начала координат.

в) $\operatorname{tg} x$ — функция неограниченная; наибольшего и наименьшего значения не имеет.

г) Нулевые значения.

$$\operatorname{tg} x = 0, \text{ если } x = \pi n \qquad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

д) Функция $\operatorname{tg} x$ везде, где она определена, возрастает.

§ 81. График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

1. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, пользуясь формулой (45) § 68:

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ сдвигом последнего влево в направлении оси абсцисс на $\frac{\pi}{2}$ и последующего отображения его (перевертывания) относительно этой оси (рис. 345). График функции $y = \operatorname{ctg} x$ называют *котангенсоидой*.

2. Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$. а) Область определения и непрерывность. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена при $x \neq \pi n$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$, т. е. в промежутках

$$\pi n < x < \pi (n + 1) \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

В точках $x = \pi n$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ не существует $(\operatorname{ctg} x = \pm \infty)$, и говорят, что она в этих точках терпит разрыв.

б) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетная и ее график симметричный относительно начала координат.

в) Как и $\operatorname{tg} x$, функция $\operatorname{ctg} x$ неограниченная и наибольшего или наименьшего значений не имеет.

г) Нулевые значения. $\operatorname{ctg} x = 0$, если $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$.

д) На всех промежутках определения $\operatorname{ctg} x$ убывает

§ 82. График и некоторые свойства функции $y = \sec x$

1. График функции $y = \sec x$ можно получить из графика функции $y = \cos x$, пользуясь зависимостью (30):

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Значения $\sec x$ для аргументов x будут обратными значениями функции $\cos x$ для тех же аргументов. График функции $y = \sec x$ приведен на рис. 346, на котором также пунктиром показана косинусоида

2. Некоторые свойства функции $y = \sec x$. а) Область определения и непрерывность. Функция $y = \sec x$ определена при всех $x \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$, т. е. в промежутках

$$\frac{\pi}{2}(2n - 1) < x < \frac{\pi}{2}(2n + 1) \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

В точках $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ функция терпит разрыв (так как в этих точках $\sec x = \pm \infty$).

б) Функция $\sec x$ — четная и ее график симметричный относительно оси ординат.

в) Наибольшие и наименьшие значения. На промежутках $\frac{\pi}{2}(4n-1) < x < \frac{\pi}{2}(4n+1)$ функция $\sec x$ принимает наименьшие значения равные $+1$, т. е.

$$\sec x = +1, \text{ если } x = 2\pi n \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

На промежутках $\frac{\pi}{2}(4n+1) < x < \frac{\pi}{2}(4n+3)$ функция $\sec x$ имеет наибольшее значение равное -1, т. е.

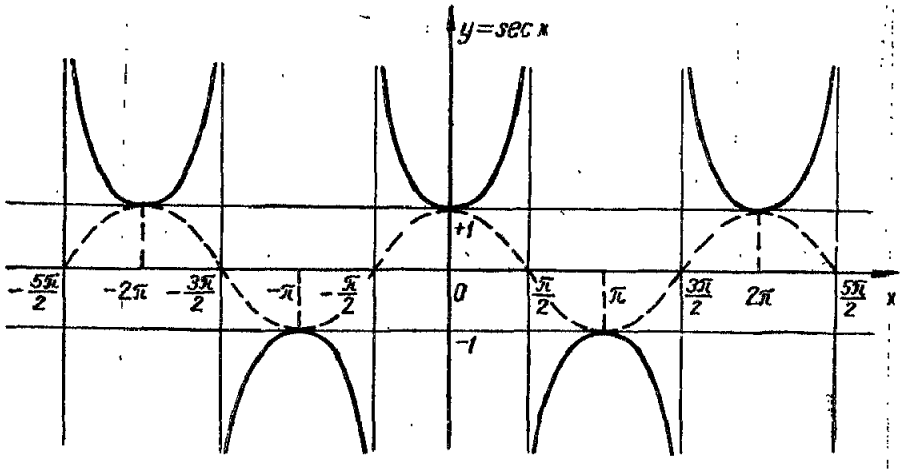


Рис. 346.

$\sec x = -1$, если $x = \pi(2n+1)$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$.

г) Нулевых значений функция $\sec x$ не имеет и ее график оси абсцисс не пересекает. При всех допустимых значениях x

$$|\sec x| \geqslant 1.$$

д) Интервалы возрастания и убывания. Функция $\sec x$ возрастает на промежутках

$$2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ и } \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi(2n+1)$$

и убывает на промежутках

$$\pi(2n+1) < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \text{ и } \frac{3\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi(n+1),$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

§ 83 График и некоторые свойства функции $y = \operatorname{cosec} x$

1. График функции $y = \operatorname{cosec} x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$, пользуясь зависимостью (31): $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$.

Для значений аргумента x значения функции $\operatorname{cosec} x$ будут обратными значениям для этих же аргументов функции $\sin x$. График функции $y = \operatorname{cosec} x$ изображен на рис. 347, на котором также пунктиром показана синусоида.

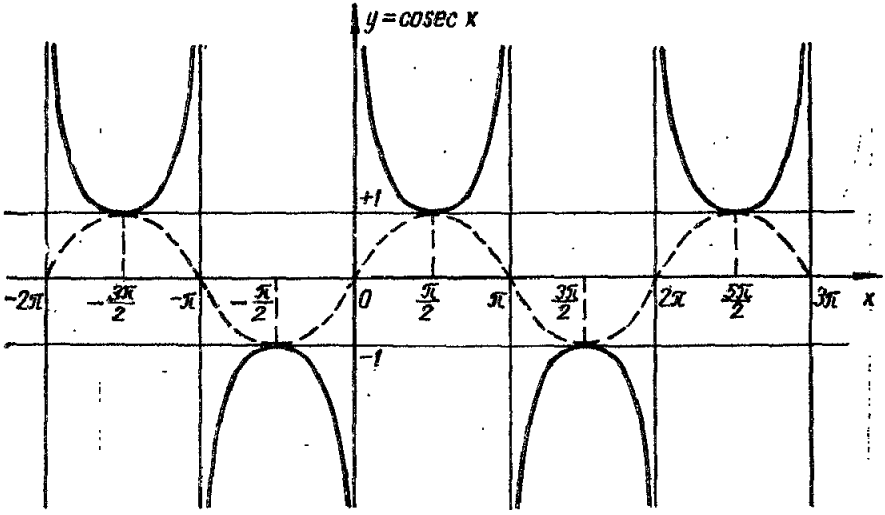


Рис. 347.

2. Свойства функции $y = \operatorname{cosec} x$. а) Область определения и непрерывность. Функция $y = \operatorname{cosec} x$ определена при всех $x \neq \pi n$ ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$), т. е. на промежутках

$$\pi n < x < \pi (n + 1) \qquad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

В точках $x = \pi n$ функция $\operatorname{cosec} x$ не существует ($\operatorname{cosec} x = \pm\infty$), и говорят, что в этих точках она терпит разрыв.

б) Функция $y = \operatorname{cosec} x$ нечетная и ее график симметричный относительно начала координат.

в) Наибольшие и наименьшие значения. На промежутках $2\pi n < x < \pi (2n + 1)$ функция $y = \operatorname{cosec} x$ имеет наименьшее значение, равное $+1$, т. е.

$$\operatorname{cosec} x = +1, \text{ если } x = \frac{\pi}{2}(4n + 1) \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

На промежутках $\pi(2n+1) < x < 2\pi(n+1)$ $(n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$ функция $y = \operatorname{cosec} x$ имеет наибольшее значение равное -1, т. е.

$$\operatorname{cosec} x = -1, \text{ если } x = \frac{\pi}{2}(4n-1) \quad (n = 0, \pm 1; \pm 2; \ldots)$$

г) Нулевых значений функция $y = \operatorname{cosec} x$ не имеет и ее график оси абсцисс не пересекает. При всех допустимых значениях x

$$|\operatorname{cosec} x| \geqslant 1.$$

д) Интервалы возрастания и убывания. Функция $\operatorname{cosec} x$ возрастает на промежутках

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n \text{ и } \pi + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

и убывает на промежутках

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n \text{ и } 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

§ 84. Простые гармонические колебания

Пусть вектор $\vec{OA}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω (греческая буква «омега») вокруг точки O в плоскости xOy, т. е.

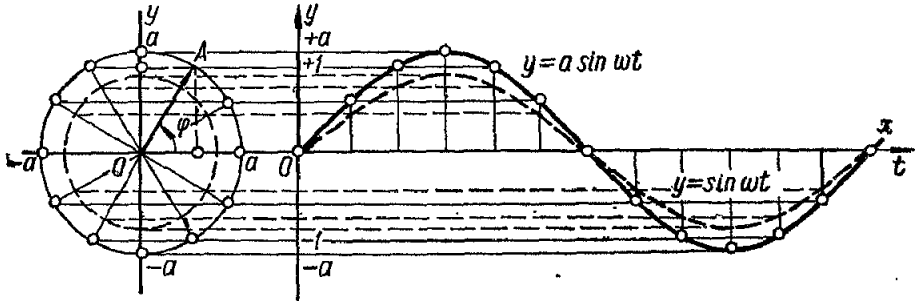


Рис 348.

за одну секунду угол изменяется на ω радианов (рис. 348). За время t вектор $\vec{OA}$ сделает поворот на ωt радианов. Угол φ (греческая буква «фи»), образованный осью Ox и вектором $\vec{OA}$, называют *фазовым углом* вращения или просто *фазой*.

Допустим, что в начальный момент движения вектор $\vec{OA}$ совпадает по направлению с положительным направлением оси Ox, тогда за время t вектор $\vec{OA}$ сделает поворот на угол

$$\varphi = \omega t \text{ радианов.} \tag{93}$$

Конец вектора — точка A — описывает окружность, радиус которой обозначим через a ($|\vec{OA}| = a$).

Исследуем движение проекции точки A на горизонтальный и вертикальный диаметры окружности (соответственно оси Ox и Oy).

Координаты точки A обозначим через $(x; y)$. Тогда

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t; \\ y = a\sin\omega t, \end{cases} \tag{94}$$

т. е. проекции точки A, равномерно движущейся по окружности, на диаметры этой окружности изменяют свое расстояние от начала координат по закону синуса и косинуса.

Движение рассматриваемых проекций — колебательное. Размах колебаний равен диаметру окружности $2a$; половина этого размаха называется *амплитудой колебаний*. Время, за которое осуществляется одно полное колебание, называется *периодом колебаний* и обозначается буквой T.

Количество колебаний ν (греческая буква «ню») на протяжении одной секунды называется *частотой колебаний*.

Так как одно колебание осуществляется на протяжении периода T, а на протяжении одной секунды происходит ν колебаний, то

$$\nu T = 1, \tag{95}$$

таким образом, частота и период колебаний величины взаимно обратные:

$$T = \frac{1}{\nu} \text{ секунд} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{T} \text{ оборотов в секунду.}$$

За время периода T вектор $\vec{OA}$ совершает полный оборот, т. е поворачивается на угол 2π радианов, поэтому

$$\omega T = 2\pi \text{ радианов.} \tag{96}$$

Отсюда

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \frac{рад}{сек}. \tag{97}$$

Графики рассмотренных колебательных процессов получим из графиков функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, если умножим ординаты этих графиков на амплитуду a. При этом ординаты новых графиков увеличатся,

если $a > 1$, или уменьшатся, если $0 < a < 1$, при $a = 1$ останутся без изменения (рис. 348).

Если в начальный момент движения ($t = 0$) вектор $\vec{OA}_0$ образует с осью Ox угол φ_0 (рис. 349), который называют *начальной фазой*, то за время t вектор $\vec{OA}$ сделает поворот ωt и в момент времени t величина фазового угла φ будет:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \tag{98}$$

Тогда графиком простого гармонического колебания будет график функции (рис. 349)

$$y = a \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{99}$$

который будет сдвинут по оси Ox от ее начала на $-\varphi_0$.

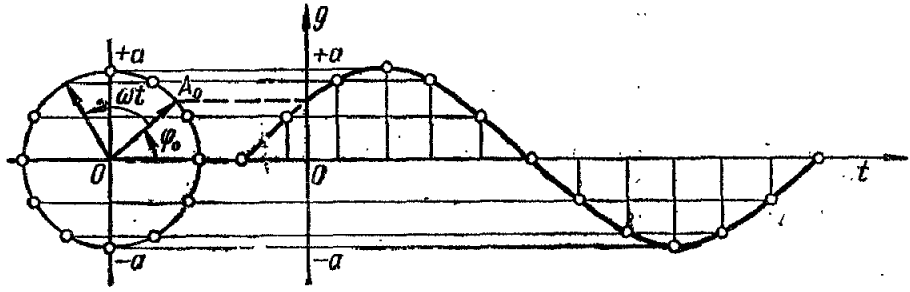


Рис. 349.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 85. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется равенство, содержащее неизвестную величину только под знаком тригонометрических функций * и справедливой лишь при некоторых определенных значениях неизвестной. Эти значения называются корнями (решениями) уравнения.

Например: $\sin x + \cos x = 1$; $\operatorname{tg} x = \cos \frac{x}{2} + 1$ и т. д

* Если в равенство, содержащее неизвестную величину, эта неизвестная величина входит не только под знаком тригонометрической функции, например, $x + \sin x = 1$, то такое уравнение называют смешанным тригонометрическим уравнением.

Простейшими тригонометрическими уравнениями называют уравнения

$$\sin x = m; \quad \cos x = m; \quad \operatorname{tg} x = m; \quad \operatorname{ctg} x = m,$$

где m — данное число.

Решения простейших тригонометрических уравнений.

а) Рассмотрим уравнение $\sin x = m$.

Если $|m| \leqslant 1$, то решения этого уравнения определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \tag{100}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

В частности, при

$$m = 0 \quad x = \pi n,$$

$$m = +1 \quad x = +\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$m = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Если $|m| > 1$, то уравнение решений не имеет.

б) Уравнение $\cos x = m$.

Если $|m| \leqslant 1$, то

$$x = \pm \arccos m + 2\pi n, \tag{101}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

В частности, при $m = 0$ $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, при $m = +1$ $x = 2\pi n$, а при $m = -1$ $x = \pi(2n + 1)$.

Если $|m| > 1$, то уравнение решений не имеет.

в) Уравнение $\operatorname{tg} x = m$ имеет решения при любом действительном значении m, которые определяются формулой

$$x = \operatorname{arc\,tg} m + \pi n, \tag{102}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

г) Уравнение $\operatorname{ctg} x = m$ имеет решение при всех действительных значениях m, которые определяются формулой

$$x = \operatorname{arc\,ctg} m + \pi n, \tag{103}$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Уравнения

$$\sin(ax + b) = m; \quad \cos(ax + b) = m;$$
$$\operatorname{tg}(ax + b) = m; \quad \operatorname{ctg}(ax + b) = m$$

приводятся к простейшим заменой

$$ax + b = t.$$

§ 86. О решении тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений, точно так же как и при решении алгебраических уравнений, прежде всего следует определить область допустимых значений неизвестной величины уравнения. Для тригонометрических уравнений, соответственно определению тригонометрических функций, областью допустимых значений неизвестного могут быть только действительные числа. Функции $\sin x$ и $\cos x$ определены при всех действительных значениях x, а функция $\operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$ и функция $\operatorname{ctg} x$ определена при $x \neq \pi n$, где $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

Кроме того, при определении области допустимых значений неизвестного данного уравнения следует учитывать, что дробное выражение существует, если знаменатель его отличный от нуля и т. д.

При преобразованиях уравнений область допустимых значений их неизвестного может изменяться. Если она расширяется, то можно получить лишние (посторонние) решения, которые из множества найденных могут быть исключены проверкой полученных решений по условию уравнения. Если же область допустимых значений неизвестного при преобразованиях уравнения сужается, то корни можно потерять, поэтому необходимо исследовать нет ли среди тех значений, на которые область допустимых значений неизвестного сузилась, решений данного уравнения. Иногда это делается непосредственной проверкой по исходному уравнению. В следующих параграфах при решении различных типов тригонометрических уравнений будет обращено внимание на случаи появления посторонних решений и случаи потери решений тригонометрических уравнений.

§ 87. Методы решения тригонометрических уравнений с функциями одного аргумента

Будем рассматривать рациональные тригонометрические уравнения относительно тригонометрических функций.

Рациональное уравнение относительно тригонометрических функций одного и того же аргумента можно привести к виду:

$$\frac{R_1(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)}{R_2(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x)} = 0, \qquad (104)$$

где R_1 и R_2 — целые рациональные функции относительно $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Если функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ заменить соответственно на $\frac{\sin x}{\cos x}$

и $\frac{\cos x}{\sin x}$, то после преобразований уравнение (104) приводится к виду:

$$\frac{R_3(\sin x,\ \cos x)}{R_4(\sin x,\ \cos x)} = 0, \tag{105}$$

где R_3 и R_4 — целые рациональные функции от $\sin x$ и $\cos x$. Рассматривая уравнение (105), приходим к выводу, что дробь может равняться нулю, если числитель

$$R_3(\sin x,\ \cos x) = 0, \tag{106}$$

а знаменатель $R_4(\sin x,\ \cos x) \neq 0$. Заметим, что $R_4(\sin x,\ \cos x)$, как многочлен от функций $\sin x$ и $\cos x$ величина ограниченная, так как $|\sin x| \leqslant 1$ и $|\cos x| \leqslant 1$, поэтому при всех значениях x

$$\frac{1}{R_4(\sin x,\ \cos x)} \neq 0.$$

Что касается тех корней уравнения (106), при которых $R_4(\sin x,\ \cos x) = 0$, то для уравнения (105) они являются посторонними, так как левая часть уравнения (105) при этом принимает вид $\frac{0}{0}$ и не имеет числового смысла.

Таким образом, в общем случае рациональные тригонометрические уравнения относительно функций одного аргумента приводятся к уравнению вида:

$$R(\sin x,\ \cos x) = 0, \tag{107}$$

где R многочлен относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Рассмотрим некоторые методы решения уравнения (107).

1. Один из методов состоит в применении так называемой универсальной тригонометрической подстановки, т. е. формул, выражающих $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При применении этого метода уравнение (104) можно не приводить к виду (105). Функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не имеет смысла при $x = \pi(2n+1)$, где $n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$, поэтому при решении уравнения этим методом дополнительно следует проверить, нет ли среди значений $x = \pi(2n+1)$ корней данного уравнения.

Приведем несколько примеров решения уравнений этим методом.

Пример 1. Решить уравнение: $\sin x - 2\cos x = 2$.

Р е ш е н и е. Заменив, согласно формул (86) и (87) § 74,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

получим

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 2\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 2.$$

Отсюда после преобразований приходим к уравнению

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 2,$$

из которого находим

$$x = 2\operatorname{arc}\operatorname{tg} 2 + 2\pi n, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Допустимыми значениями неизвестного в данном уравнении были все действительные значения x. При переходе в уравнении к функции $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ из рассмотрения выпали значения $x = \pi(2n+1)$, которые, как было сказано ранее, следует проверить по условию. Подставляя $x = \pi(2n+1)$ в данное уравнение, убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения. Поэтому в качестве окончательного ответа получаем:

$x = 2\operatorname{arc}\operatorname{tg} 2 + 2\pi n$; $x = \pi(2n+1)$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

П р и м е р 2. Решить уравнение: $1 - \sin x = \cos x(\sin x + \cos x)$.

Р е ш е н и е. Заменяя $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим уравнение

$$1 - \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right),$$

после преобразований которого приходим к уравнению, содержащему только $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$$

и, следовательно,

$$x=2\pi n \text{ или } x=\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad (n=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots).$$

Проверим не будут ли корнями данного уравнения значения $x=\pi(2n+1)$.

Подставляя это значение в данное уравнение, находим

$$1-\sin[\pi(2n+1)]=\cos[\pi(2n+1)]\{\sin[\pi(2n+1)]+\cos[\pi(2n+1)]\}$$

или

$$1-0=-1(0-1);\ 1=1,$$

т. е. значения $x=\pi(2n+1)$ также являются корнями уравнения.

Таким образом, корнями данного уравнения будут значения, определяемые формулами:

$$x=2\pi n, \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad x=\pi(2n+1),$$

где $n=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

Заметим, что первая и третья формулы могут быть заменены одной формулой $x=\pi n$.

Ответ: $x=\pi n, \quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

2. Универсальная подстановка очень часто приводит к уравнению высокой степени относнтельно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ н поэтому является во многих случаях не совсем удобной. Иногда проще при решении уравнения (107) применять замены

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x} \text{ или } \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Укажем правнло, при помощи которого можно ориентироваться в каких случаях и какую из этих замен можно применять. Напомним, что $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$, а $\cos(2\pi-x)=\cos x$. Поэтому, если в уравнении (107) левая часть не изменяется при замене x на $-x$ или x на $2\pi-x$, то это значит, что она ведет себя как $\cos x$ и в этом случае целесообразно заменить $\sin x$ на $\sqrt{1-\cos^2 x}$. Наоборот, если при замене x на $-x$ левая часть уравнения (107) изменяет только знак или, если при замене x на $\pi-x$ она не изменяется, то целесообразно в уравнении оставить функцию $\sin x$, т. е. $\cos x$ заменить на $\sqrt{1-\sin^2 x}$.

Пример 3. Решить уравнение:

$$3\sin^3 x + 3\sin x\cos^2 x + 2\cos^2 x = 0.$$

Решение. Левая часть этого уравнения является функцией и не четной и не нечетной. Поэтому проверяем поведение левой части уравнения при замене x на $\pi - x$. Убеждаемся, что при такой замене она не изменяется. В этом случае целесообразно произвести замену

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

После этой замены получим

$$3\sin^3 x + 3\sin x(1 - \sin^2 x) + 2(1 - \sin^2 x) = 0$$

или

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно $\sin x$, найдем

$$\sin x = 2, \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет, а из второго получаем искомый ответ:

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 4. Решить уравнение:

$$4\sin^4 x - 2\sin^2 x\cos x + 4\cos 2x = 2\cos^3 x - \sin^2 2x + 2.$$

Решение. При замене x на $-x$ обе части этого уравнения остаются без изменения. Поэтому целесообразно сделать замену $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Учитывая, что $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и заменяя $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим:

$$4(1 - \cos^2 x)^2 - 2(1 - \cos^2 x)\cos x + 4(2\cos^2 x - 1) = 2\cos^3 x - 4\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + 2.$$

Отсюда

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение относительно $\cos x$, найдем:

$$\cos x = 1 \text{ и } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Из этих уравнений получаем окончательно:

$$x = 2\pi n \text{ и } x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = 2\pi n$ и $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

3. Уравнение (107) можно решать, приводя его к однородному тригонометрическому уравнению относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Однородным уравнением относительно $\sin x$ и $\cos x$ называют уравнение, каждый член которого имеет одну и ту же степень относительно $\sin x$ и $\cos x$. Например, однородное уравнение второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$ имеет вид:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Такое уравнение легко приводится к уравнению с одной неизвестной функцией, делением обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$. После деления на $\cos^2 x$ получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$:

$$a^2 \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

При делении на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) необходимо показать, что $\cos^2 x \neq 0$. Действительно, подставив $\cos x = 0$ в исходное уравнение получаем, что $a \sin^2 x = 0$, а это при $a \neq 0$ невозможно, так как, если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнение n-й степени

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0$$

делением на $\cos^n x$ или $\sin^n x$ можно привести к алгебраическому уравнению n-ой степени относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$.

Уравнение (107) всегда можно привести к однородному уравнению относительно $\sin x$ и $\cos x$. Для этого достаточно в уравнении (107) все его члены четной степени перенести в одну часть уравнения, а члены нечетной степени относительно $\sin x$ и $\cos x$ в другую часть и после этого возвести обе части уравнения в квадрат. Далее, пользуясь тем, что при любом k

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^k = 1,$$

показатель k можно подобрать так, чтобы сделать уравнение однородным. Покажем это на примере. Приведем уравнение

$$2 \sin^2 x + \cos x - 3 \sin x + 1 = 0$$

к однородному. Перепишем это уравнение в таком виде:

$$2 \sin^2 x + 1 = 3 \sin x - \cos x;$$

обе его части возведем в квадрат, после чего получим

$$4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1 = 9 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x + \cos^2 x.$$

Подбирая показатель k соответствующим образом, данное уравнение можно записать так:

$$4\sin^4 x + 4\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 =$$
$$= (9\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Отсюда после очевидных преобразований получаем уравнение четвертой степени

$$3\sin^3 x\cos x - 2\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin x\cos^3 x = 0$$

однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5. Решить уравнение: $\sec x = 4\sin x + 6\cos x$.

Решение. Умножив обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получим

$$1 = 4\sin x\cos x + 6\cos^2 x$$

и заменим $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$; тогда имеем:

$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Последнее уравнение разделим на $\cos^2 x$, после чего получаем

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 5 = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} x = 5, \quad \operatorname{tg} x = -1$$

и, следовательно,

$$x = \operatorname{arc\,tg} 5 + \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Ответ: $x = \operatorname{arc\,tg} 5 + \pi n$ и $x = \frac{\pi}{4}(4n - 1)$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 6. Решить уравнение $\sin^3 x - \cos^3 x + 1 = 0$.

Решение. Перенеся члены нечетной степени относительно $\sin x$ и $\cos x$ в одну часть уравнения, получим:

$$\cos^3 x - \sin^3 x = 1.$$

Возведем обе части в квадрат и умножим 1 на $(\sin^2 x + \cos^2 x)^3$, тогда уравнение примет вид

$$(\cos^3 x - \sin^3 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3$$

или

$$\cos^6 x - 2\sin^3 x\cos^3 x + \sin^6 x =$$
$$= \sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \cos^6 x.$$

Отсюда

$$3\sin^4 x\cos^2 x + 2\sin^3 x\cos^3 x + 3\sin^2 x\cos^4 x = 0$$

или

$$3\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^3 x\cos^3 x = 0$$

и, разлагая на множители, получим:

$$\sin^2 x\cos^2 x\,(3 + 2\sin x\cos x) = 0.$$

Так как

$$3 + 2\sin x\cos x \neq 0,$$

то окончательно имеем:

$$\sin^2 x = 0 \quad \text{и} \quad \cos^2 x = 0$$

и, следовательно,

$$x = \pi n \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{2}(2n + 1).$$

Проверив найденные значения по условию уравнения, в ответе получим:

$$x = 2\pi k \text{ и } x = \frac{\pi}{2}(4k - 1), \text{ где } k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$$

4. Рассмотрим уравнение вида: $a\sin x + b\cos x = c$, которое является частным случаем уравнения (107). Коэффициенты a, b, и c — произвольные вещественные числа.

Будем решать данное уравнение при помощи введения вспомогательного угла (см. § 75, пример 2). Для этого разделим обе части уравнения на $+\sqrt{a^2 + b^2}$, после чего получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ будем рассматривать как значения косинуса и синуса вспомогательного аргумента φ, т. е. будем считать, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi,$$

так как

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1; \quad \left|\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leqslant 1$$

и

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1.$$

Без ограничения общности можно полагать, что $b \geqslant 0$, тогда $\sin\varphi \geqslant 0$ и угол можно взять в промежутке $0 < \varphi < \pi$.

Определив по таблицам значение φ, данное уравнение запишем в виде:

$$\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

или

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$, т. е. $a^2+b^2 \geqslant c^2$, то решениями уравнения будут значения

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \varphi + \pi n,$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$, т. е. $a^2+b^2 < c^2$, то уравнение решений не имеет.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на 2, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

и обозначим

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ, \quad \frac{1}{2} = \sin 30^\circ.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$\sin(x+30^\circ) = \frac{1}{2},$$

откуда

$$x + 30^\circ = (-1)^n 30^\circ + 180^\circ \cdot n, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

или при $n = 2k$ и $n = 2k+1$:

$$x = 180^\circ \cdot 2k \quad \text{и} \quad x = -60^\circ + 180^\circ(2k+1).$$

Ответ: $x = 360^\circ \cdot k$ и $x = 120^\circ(3k+1)$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

5. Рассмотрим уравнение: $\sin^n x + \cos^n x = 1$, где n — натуральное число.

Если $n = 1$, то уравнение приводится к виду, рассмотренному в пункте 4.

При $n = 2$ имеем тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, где x — любое действительное число.

При $n \geqslant 3$, если $|\sin x| \neq 1$ и $|\cos x| \neq 1$, имеем

$$\begin{cases} \sin^n x < \sin^2 x, \\ \cos^n x < \cos^2 x, \end{cases}$$

так как показательная функция при основании меньшем единицы убывает. Складывая почленно полученные неравенства, найдем, что

$$\sin^n x + \cos^n x < 1, \quad n \geqslant 3,$$

при всех x, для которых $|\sin x| \neq 1$ и $|\cos x| \neq 1$. Таким образом:

а) Если n — нечетное число, то возможны случаи

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

из которых соответственно получаем решения данного уравнения

$$x = \frac{\pi}{2}(4k + 1) \text{ и } x = 2\pi k, \quad \text{где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

б) Если n — четное число, то возможны случаи

$$\begin{cases} \sin x = \pm 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \pm 1, \end{cases}$$

из которых получаем решения данного уравнения в виде

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot k, \quad \text{где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Пример 8. Решить уравнение: $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

Решение. Из изложенного выше следует, что это уравнение приводится к двум возможным случаям:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1, \end{cases}$$

откуда и находим решения $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ и $x = 2\pi k$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$ и $x = 2\pi k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Заметим, что при $n \geqslant 3$ корни уравнения

$$\sin^n x + \cos^n x = 1$$

зависят не от численного значения величины n, а только от того, четное ли n или нечетное.

§ 88. Тригонометрические уравнения с разными аргументами

Рациональные тригонометрические уравнения с функциями разных аргументов можно записать в виде:

$$R(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \operatorname{tg} 2x,\ \operatorname{ctg} 2x,\ \ldots) = 0, \qquad (108)$$

где R — символ рациональной функции.

Уравнение (108) можно привести к виду:

$$R(\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots) = 0. \qquad (109)$$

Тригонометрические уравнения с разными аргументами и одновременно с разными функциями решают, приводя их к уравнениям с одним аргументом.

Рассмотрим некоторые способы решения таких тригонометрических уравнений.

1. Уравнения типа (108), левые части которых разлагаются на множители.

Если левую часть уравнения (108) можно разложить на множители

$$R_1 \cdot R_2 \ldots R_n = 0,$$

где R_1, R_2, $\ldots$, R_n — рациональные функции тригонометрических функций, то для решения уравнения (108) достаточно решить каждое из уравнений

$$R_1 = 0;\quad R_2 = 0;\quad \ldots;\quad R_n = 0$$

и объединить общие решения этих уравнений в одно множество, которое и будет решением исходного уравнения (108). При этом можно получить посторонние решения. Посторонними решениями будут те, при которых хотя бы один из множителей левой части уравнения (108) [R_1, R_2, $\ldots$, R_n] теряет смысл.

Пример 1. Решить уравнение: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

Решение. Сгруппируем члены левой части уравнения так:

$$(\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) = 0$$

и каждую из сумм в круглых скобках преобразуем в произведение, воспользовавшись формулой (78) § 73:

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Вынеся теперь $2\sin\frac{5x}{2}$ за скобки и отбросив множитель 2, находим

$$\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0,$$

после чего, преобразовав сумму косинусов в произведение, получим

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}=0.$$

Отсюда имеем

$$\sin\frac{5x}{2}=0;\quad \cos x=0;\quad \cos\frac{x}{2}=0$$

и из этих уравнений находим решения:

$$x=\frac{2}{5}\pi n,\quad x=\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad x=\pi(2n+1),\quad n=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$$

Так как все множители левой части данного уравнения имеют смысл при всех значениях x, то посторонних решений здесь нет.

Ответ: $x=\frac{2}{5}\pi n$; $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$ и $x=\pi(2n+1)$, где $n=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

Пример 2. Решить уравнение: $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$.

Решение: Перенеся все члены уравнения в левую часть, получим

$$\sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x=0.$$

Сгруппировав первый и третий члены данного уравнения и разложив эту разность квадратов на множители, найдем:

$$(\sin x+\sin 3x)(\sin x-\sin 3x)+\sin^2 2x=0$$

или

$$-2\sin 2x\cos x\cdot 2\sin x\cos 2x+\sin^2 2x=0.$$

В таком случае, учтя, что $2\sin x\cos x=\sin 2x$, имеем

$$-2\sin^2 2x\cos 2x+\sin^2 2x=0,$$

откуда

$$\sin^2 2x(1-2\cos 2x)=0.$$

Последнее уравнение распадается на два уравнения

$$\sin 2x=0\quad\text{и}\quad\cos 2x=\frac{1}{2},$$

решая которые находим:

$$x=\frac{\pi n}{2};\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n.$$

Ответ: $x=\frac{\pi n}{2}$ и $x=\frac{\pi}{6}(6n\pm 1)$, где $n=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

Пример 3. Решить уравнение: $2 \sin 3x = 3 \cos x + \cos 3x$.

Решение. Согласно формул (65) и (66) § 70, заменим

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$2 (3 \sin x - 4 \sin^3 x) = 3 \cos x + 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

или

$$6 \sin x - 8 \sin^3 x - 4 \cos^3 x = 0.$$

Так как $\cos x \neq 0$, то, разделив обе части уравнения на $2 \cos^3 x$, получим

$$\frac{3 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - 4 \operatorname{tg}^3 x - 2 = 0$$

или

$$3 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) - 4 \operatorname{tg}^3 x - 2 = 0$$

и после приведения подобных членов

$$\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0.$$

Разлагая левую часть уравнения на множители, найдем, что

$$(\operatorname{tg} x + 2) (\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} x = -2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 1,$$

а следовательно,

$$x = -\operatorname{arc tg} 2 + \pi n \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Ответ: $x = -\operatorname{arc tg} 2 + \pi n$; $x = \frac{\pi}{4}(4n + 1)$, где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

2. Тригонометрические уравнения, которые решаются преобразованием произведений тригонометрических функций в суммы.

К этому типу уравнений, в частности, относятся уравнения

$$\sin mx \cos nx = \sin px \cos qx,$$
$$\sin mx \sin nx = \sin px \sin qx,$$
$$\cos mx \cos nx = \cos px \cos qx,$$

которые легко разлагаются на множители, если $m \pm n = p \pm q$.

Пример 4. Решить уравнения: $\sin 2x \sin 6x = \sin 3x \sin 5x$.

Решение. При помощи формулы (77) § 72 преобразуем обе части уравнения в суммы и перенесем все члены уравнения в левую часть:

$$\frac{\cos 4x - \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2}$$

или

$$\cos 4x - \cos 2x = 0.$$

Воспользовавшись теперь формулой (81) § 73, разложим левую часть последнего уравнения на множители

$$2 \sin 3x \sin x = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\sin 3x = 0 \quad \text{и} \quad \sin x = 0,$$

а следовательно,

$$x = \frac{\pi n}{3} \quad \text{и} \quad x = \pi n.$$

Так как вторая серия решений включается в первую, то получаем окончательно:

$$x = \frac{\pi n}{3}, \text{ где } n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$$

Пример 5. Решить уравнение: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

Решение. Преобразовав все члены левой части уравнения по формуле $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, получим

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} = 2$$

или

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0.$$

Разлагая левую часть уравнения на множители, приходим к уравнению

$$\cos x \cos 2x \cos 5x = 0,$$

откуда

$$\cos x = 0, \quad \cos 2x = 0 \quad \text{и} \quad \cos 5x = 0$$

и соответственно

$$x = \frac{\pi}{2}(2n + 1), \quad x = \frac{\pi}{4}(2n + 1) \quad \text{и} \quad x = \frac{\pi}{10}(2n + 1).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$; $x = \frac{\pi}{4}(2n + 1)$ и $x = \frac{\pi}{10}(2n + 1)$,

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

§ 89. Графические методы решения тригонометрических уравнений

Графические методы решения уравнений, известные из курса алгебры, могут быть применены и к решению тригонометрических уравнений. Эти методы в элементарной математике, в частности, для смешанных тригонометрических уравнений, являются единственными.

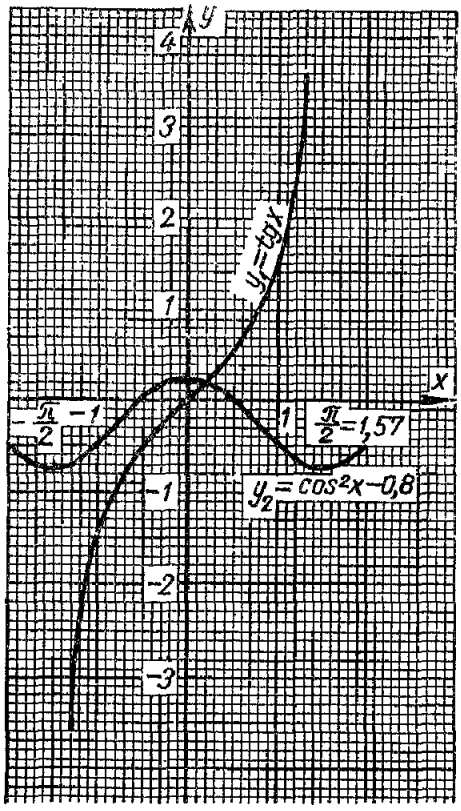


Рис. 350.

Пример 1. Решить уравнение: $\operatorname{tg} x - \cos^2 x + 0{,}8 = 0$.

Решение. Перепишем это уравнение в виде

$$\operatorname{tg} x = \cos^2 x - 0{,}8$$

и построим графики функций

$$y_1 = \operatorname{tg} x \text{ и } y_2 = \cos^2 x - 0{,}8.$$

Решениями данного уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков этих функций (рис. 350). Заметим, что графики функций достаточно построить на промежутке $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, так как функции $\cos^2 x - 0{,}8$ и $\operatorname{tg} x$ имеют период π.

Если график аккуратно построить на миллиметровой бумаге, то (согласно выполненных построений) найдем:

$$x_1 \approx 0{,}17;\ x = x_1 + k\pi.$$

Это уравнение допускает аналитическое решение, которое по сравнению с графическим является более трудоемким.

Пример 2. Решить уравнение:

$$2^{x^2} = \cos x.$$

Решение. Строим графики функций $y_1 = 2^{x^2}$ и $y_2 = \cos x$ (рис. 351). Абсциссы точек пересечения графиков этих функций будут решениями данного уравнения. Согласно рис. 351, находим, что

$$x = 0,$$

причем других действительных корней данное уравнение иметь не может.

Пример 3. Решить уравнение: $x = \cos x$.

Решение. Строим графики $y_1 = \cos x$ и $y_2 = x$ (рис. 352) и согласно выполненных построений находим искомый корень

$$x \approx 0{,}74,$$

который будет единственным.

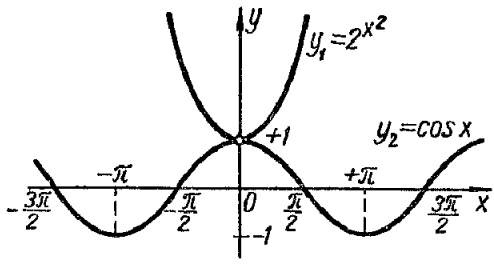


Рис. 351.

При графическом решении тригонометрических уравнений мы находим только действительные корни. В элементарном курсе тригонометрии это не является ограничением, так как рассматриваются только действительные значения тригонометрических функций.

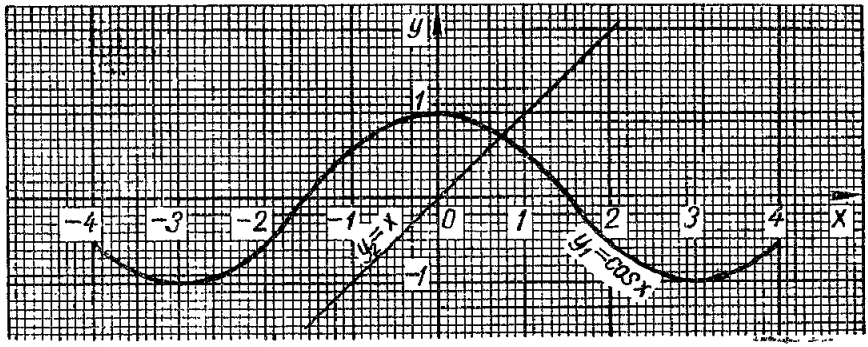


Рис. 352.

§ 90. Системы тригонометрических уравнений

Системы тригонометрических уравнений с двумя и тремя неизвестными встречаются в элементарном курсе тригонометрии в основном при решении треугольников. Решение и исследование систем тригонометрических функций в общем случае представляет значительные трудности.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = 2b. \end{cases}$$

Р е ш е н и е Левую часть первого уравнения системы, воспользовавшись формулой (78) § 73, преобразуем в произведение, тогда имеем:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a$$

или

$$2 \sin b \cos \frac{x-y}{2} = a, \tag{110}$$

поскольку, согласно второго уравнения системы, $\frac{x+y}{2} = b$. Рассмотрим возможные здесь случаи:

а) Если $a = 0$ и $b = \pi k$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$,

то решением системы будет любая пара чисел, определяемая системой:

$$x = \alpha,$$
$$y = 2\pi k - \alpha,$$

где α — любое действительное число, а $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

б) Если $a = 0$ и $b \neq \pi k$, то из уравнения (110) находим

$$\cos \frac{x-y}{2} = 0$$

или

$$\frac{x-y}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$$

и решение данной системы сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2b, \\ x - y = \pm \pi + 4\pi k. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем:

$$x = b \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$y = b \mp \frac{\pi}{2} - 2k\pi, \text{ где } k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

в) Если $a \neq 0$ и $b = \pi k$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$, то система решений не имеет.

г) Если $a \neq 0$ и $b \neq \pi k$ $(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$, то, определив $(x - y)$ из простейшего тригонометрического уравнения (110), сводим данную систему к системе линейных алгебраических уравнений

$$x + y = 2b,$$

$$x - y = \pm 2 \arccos \frac{a}{2 \sin b} + 4k\pi,$$

и если $\left| \frac{a}{2 \sin b} \right| \leqslant 1$, то система имеет решение

$$x = b \pm \arccos \frac{a}{2 \sin b} + 2k\pi,$$

$$y = b \mp \arccos \frac{a}{2 \sin b} - 2k\pi,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

Если же $\left| \frac{a}{2 \sin b} \right| > 1$, то система решений не имеет.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ \sin x \sin y = b. \end{cases}$$

Решение. Складывая и вычитая почленно уравнения данной системы, согласно формул (37) и (38) § 67, получим:

$$\begin{cases} \cos (x - y) = a + b, \\ \cos (x + y) = a - b. \end{cases}$$

Отсюда, решив по формуле (101) § 85 каждое из найденных простейших тригонометрических уравнений, приходим к системе линейных алгебраических уравнений, решение которой уже не требует большого труда:

$$\begin{cases} x - y = \pm \arccos (a + b) + 2\pi k \ (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots), \\ x + y = \pm \arccos (a - b) + 2\pi n \ (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots). \end{cases}$$

Если $|a + b| \leqslant 1$ и $|a - b| \leqslant 1$, то из последней системы находим искомое решение:

$$x = \pm \frac{1}{2} [\arccos (a + b) + \arccos (a - b)] + \pi (n + k),$$

$$y = \pm \frac{1}{2} [\arccos (a - b) - \arccos (a + b)] + \pi (n - k),$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Если $|a + b| > 1$ или $|a - b| > 1$, то система решений не имеет.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = a, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Решение. Если учесть, что при $x + y + z = \pi$, согласно примеру 4 § 73 $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z$, то система приводится к виду:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = a, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Тогда

$$\operatorname{tg} z = a - b$$

и при этом два первых уравнения исходной системы принимают вид:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{a}{a-b}, \qquad (a \neq b),$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b.$$

Поэтому, воспользовавшись формулами Виета, находим $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ как корни t_1 и t_2 квадратного уравнения

$$t^2 - bt + \frac{a}{a-b} = 0,$$

а затем из простейших тригонометрических уравнений (см. § 85)

$$\operatorname{tg} x = t_1, \quad \operatorname{tg} y = t_2, \quad \operatorname{tg} z = a - b$$

определяем x, y и z.

§ 91. Тригонометрические неравенства

Неравенство, в котором неизвестное входит только под знак тригонометрической функции, называется *тригонометрическим*.

1. Простейшие тригонометрические неравенства. К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся неравенства вида: $\sin x \gtrless m$; $\cos x \gtrless m$; $\operatorname{tg} x \gtrless m$ и $\operatorname{ctg} x \gtrless m$.

а) Неравенство $\sin x > m$.

Если $m < -1$, то решением неравенства будет любое действительное число.

Если $-1 \leqslant m < +1$, то решениями неравенства будут

$$2\pi k + \arcsin m < x < \pi(2k+1) - \arcsin m,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

На рис. 353 штриховкой отмечены значения x, удовлетворяющие неравенству $\sin x > m$ при $-1 \leqslant m < +1$.

Если $m \geqslant 1$, то неравенство решений не имеет.

б) Неравенство $\sin x < m$.

Если $m \leqslant -1$, то неравенство решений не имеет.

Если $-1 < m \leqslant +1$, то решениями неравенства будут

$$\pi(2k+1) - \arcsin m < x < \arcsin m + 2\pi(k+1),$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

На рис. 353 значения x, удовлетворяющие неравенству $\sin x < m$, незаштрихованы.

Если $m > +1$, то неравенство справедливо при всех действительных значениях m.

в) Неравенство $\cos x > m$.

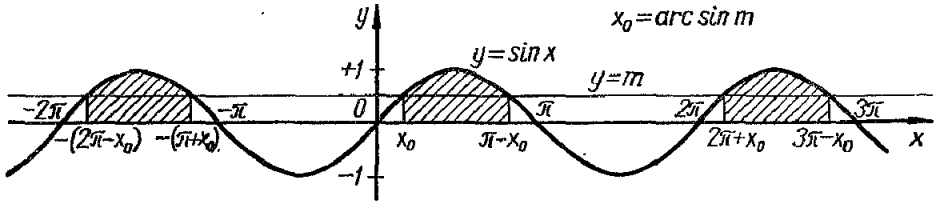


Рис. 353.

Если $m < -1$, то решением неравенства служит любое действительное число.

Если $-1 \leqslant m < +1$, то решения неравенства лежат в промежутках

$$\arccos m + 2\pi k < x < 2\pi(k+1) - \arccos m,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Если $m \geqslant +1$, то неравенство решений не имеет.

г) Неравенство $\cos x < m$.

Если $m \leqslant -1$, то неравенство решений не имеет.

Если $-1 < m \leqslant +1$, то решениями неравенства будут значения x из промежутков:

$$\arccos m + 2\pi k < x < 2\pi(k+1) - \arccos m,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Если $m > +1$, то любое действительное число есть решение неравенства.

Постройте рисунок для неравенств $\cos x \gtrless m$, аналогичный рис. 353.

д) Неравенство $\operatorname{tg} x > m$ имеет решением значения x из промежутков

$$\operatorname{arc\,tg}\, m + \pi k < x < \frac{\pi}{2}(2k+1),$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

е) Неравенство $\operatorname{tg} x < m$ имеет решениями значения x из промежутков

$$\frac{\pi}{2}(2k-1) < x < \operatorname{arctg}\, m + \pi k,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

ж) Неравенство $\operatorname{ctg} x > m$ имеет решения в промежутках

$$\pi k < x < \operatorname{arcctg}\, m + \pi k,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

з) Неравенство $\operatorname{ctg} x < m$ имеет решения в промежутках

$$\operatorname{arc\,ctg}\, m + \pi k < x < \pi(k+1),$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

2. Решение тригонометрических неравенств. Будем рассматривать неравенства вида:

$$f(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x) \gtrless m.$$

Если функция $f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$ периодична, то достаточно найти решения на отрезке числовой оси, равном по длине наименьшему периоду функции f, а затем, пользуясь периодичностью функции, записать решения неравенства на всей числовой оси.

Рассмотрим несколько простых тригонометрических неравенств.

Пример 1. Решить неравенство: $\cos^2 x - 3\cos x < 0$.

Решение. Разложим левую часть неравенства на множители:

$$\cos x(\cos x - 3) < 0.$$

Учитывая, что $\cos x - 3 < 0$ при всех значениях x, получаем

$$\cos x > 0,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 2. Решить неравенство: $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| < 1$.

Решение. Данное неравенство эквивалентно неравенствам

$$-1 < \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 1$$

или

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}+\pi k,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

где $k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

Пример 3. Решить неравенство: $|\sin x|>\frac{1}{2}$.

Решение. Избавляясь от знака абсолютной величины, имеем

$$\sin x>+\frac{1}{2}\ \text{и}\ \sin x<-\frac{1}{2}.$$

Из первого полученного неравенства находим:

$$\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\pi(2k+1)-\frac{\pi}{6},$$

а из второго —

$$\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1)<x<2\pi(k+1)-\frac{\pi}{6}.$$

Решения этих двух неравенств можно объединить и окончательный ответ записать в виде:

$$\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\pi(k+1)-\frac{\pi}{6},$$

где $k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

Пример 4. Решить неравенство: $\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x<0$.

Решение. Разделив обе части данного неравенства на $\cos^2 x\neq 0$ (при $\cos x=0$ неравенство принимает вид $\sin^2 x<0$, что невозможно), получим

$$\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-3<0$$

или

$$(\operatorname{tg} x+3)(\operatorname{tg} x-1)<0.$$

Отсюда находим

$$-3<\operatorname{tg} x<+1$$

и, следовательно,

$$-\operatorname{arctg} 3+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k.$$

Ответ:

$$-\operatorname{arctg} 3 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Пример 5. Решить неравенство: $\sin x + \sin 3x < \sin 2x + \sin 4x$.

Решение. Перенесем все члены неравенства, содержащие неизвестное, в одну часть, тогда получим:

$$\sin x + \sin 3x - \sin 2x - \sin 4x < 0.$$

Функция $f(x) = \sin x + \sin 3x - \sin 2x - \sin 4x$ имеет наименьший положительный период, равный 2π, поэтому достаточно найти решения этого неравенства, например, на отрезке $[0, 2\pi]$, а затем с учетом периода записать все множество его решений.

Преобразовав при помощи формулы (79) § 73 левую часть исходного неравенства в произведение, получим

$$-4 \sin \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5x}{2} < 0$$

или

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5x}{2} > 0$$

и найдем решения последнего неравенства на отрезке $[0, 2\pi]$. Так как в промежутке $(0, 2\pi)$ множитель $4 \sin \frac{x}{2} > 0$, то исходное неравенство сводится к решению неравенства

$$\cos x \cos \frac{5x}{2} > 0.$$

Для решения последнего неравенства в промежутке $[0, 2\pi]$ нанесем нули левой части этого неравенства, т. е. значения аргумента $\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{5}; \pi; \frac{7\pi}{5}; \frac{3\pi}{2}; \frac{9\pi}{5}$ (рис. 354).

Нетрудно проверить, что одинаковые знаки функции $\cos x$ и $\cos \frac{5x}{2}$ принимают на промежутках

$$0 < x < \frac{\pi}{5}; \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{5}; \quad \pi < x < \frac{7\pi}{5}; \quad \frac{3\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{5},$$

которые на рис. 354 отмечены штриховкой.

Тогда множество решений исходного неравенства запишется в виде:

$$2\pi k < x < \frac{\pi}{5} + 2\pi k,$$

$$2\pi k + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{5} + 2\pi k,$$

$$2\pi k + \pi < x < \frac{7\pi}{5} + 2\pi k,$$

$$2\pi k + \frac{3\pi}{2} < x < \frac{9\pi}{5} + 2\pi k,$$

где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

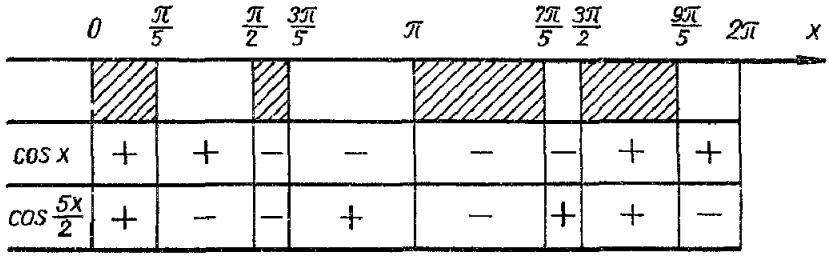


Рис. 354.

3. Доказательство тригонометрических неравенств. Методы доказательства тригонометрических неравенств почти ничем не отличаются от доказательства алгебраических неравенств.

Пример 6. Доказать, что если $0 < \alpha < \pi$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}\alpha.$$

Решение. Найдем разность и покажем, что она не отрицательна:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - (1 + \operatorname{ctg}\alpha) = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha} \geqslant 0,$$

так как по условию $0 < \alpha < \pi$. Поэтому $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}\alpha$, причем знак равенства достигается при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Пример 7. Доказать, что $|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geqslant 1$.

Решение. Для доказательства используем очевидное неравенство

$$2|\sin\alpha||\cos\alpha| \geqslant 0,$$

к обеим частям которого прибавим по 1. Тогда будем иметь

$$1 + 2|\sin\alpha||\cos\alpha| \geqslant 1$$

или

$$\sin^2\alpha + 2|\sin\alpha||\cos\alpha| + \cos^2\alpha \geqslant 1,$$

откуда

$$(|\sin\alpha| + |\cos\alpha|)^2 \geqslant 1.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства и взяв при этом только положительные значения корней, получим:

$$|\sin\alpha| + |\cos\alpha| \geqslant 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 8. Доказать, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha \geqslant 7.$$

Решение. Левую часть неравенства преобразуем так:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha &= \\ = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) + (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) &= \\ = 3 + 2(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) \geqslant 7,&\end{aligned}$$

поскольку при любом значении угла α

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \geqslant 2,$$

как сумма двух взаимнообратных положительных величин. В частности, знак равенства будем иметь только при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = 45° + 90°k$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, так как в этом случае

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha = \pm 1.$$

Пример 9. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Решение. Обозначим

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = a$$

и заменим $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}$, тогда $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ и, следовательно,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = a$$

или

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = a,$$

откуда получаем

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 2a.$$

Выделим в левой части последнего равенства полный квадрат:

$$\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 2a.$$

Тогда

$$\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 2a = \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2,$$

и так как правая часть неотрицательна, то

$$\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 2a \geqslant 0,$$

откуда

$$a \leqslant \frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Заменив a его первоначальным значением, мы и получим искомое неравенство

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8},$$

причем знак равенства достигается при

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

§ 92. Обратные тригонометрические функции

1. Понятие обратной функции. Пусть задана функция $y = f(x)$, т. е. пусть каждому допустимому значению величины x соответствует определенное значение величины y. В этой функциональной

зависимости можно поменять ролями величины x и y, т. е. y можно рассматривать как аргумент, тогда x будет функцией от y. Обозначим ее

$$x = \varphi(y).$$

Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ выражают одну и ту же зависимость между одними и теми же величинами x и y. Если построить графики этих функций в одной координатной плоскости (не меняя ролями оси координат), то это будет одна и та же линия.

Функцию $x = \varphi(y)$ называют обратной относительно функции $y = f(x)$, точно так же функцию $f(x)$ можно назвать обратной относительно функции $\varphi(y)$.

Подчеркнем, что обратная функция по сравнению с прямой функцией никакой новой информации не дает, однако обратная функция позволяет более просто и наглядно решать многие задачи, которые, пользуясь только прямой функцией, решить значительно труднее. С подобными обстоятельствами мы встречаемся не только в математике. Например, русское слово легко перевести на английский язык, пользуясь русско-английским словарем.

Если же мы эту задачу будем решать при помощи англо-русского словаря, который для того же самого объема слов устанавливает то же самое соответствие, то мы вынуждены будем пересмотреть весь словарь, чтобы найти все возможные значения этого слова или убедиться, что данное русское слово имеет только одно английское значение.

По установившейся традиции обратную функцию также обозначают y, а ее аргумент обозначают через x, т. е. функцию обратную к функции

$$y = f(x)$$

будем обозначать

$$y = \varphi(x),$$

(а не $x = \varphi(y)$), но при этом нельзя забывать, что y и x в новой записи имеют «обратный смысл» по сравнению с исходной функцией $y = f(x)$.

В таких обозначениях *областью определения обратной функции* служит совокупность значений данной функции, а совокупность значений обратной функции — *областью определения данной функции.*

График обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен с графиком прямой функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Отсюда вытекает простой и удобный способ построения графиков обратных функций по графикам прямых функций. Начертив график данной функции (медленно сохнущими чернилами), надо лист бумаги перегнуть по биссектрисе первого и третьего координатных углов и тогда полученный отпечаток даст график обратной функции.

В отдельных случаях обратную функцию можно получить и аналитически. Для этого в заданной функции

$$y = f(x)$$

надо прежде всего поменять ролями y и x, т. е. записать ее в виде

$$x = f(y).$$

Затем (если это возможно) решить данное уравнение относительно y и тогда мы получим обратную функцию

$$y = \varphi(x).$$

Пример 1. Найти функцию, обратную функции $y = \frac{3x-5}{2}$.

Решение. Поменяв ролями аргумент и функцию, получим

$$x = \frac{3y-5}{2},$$

после чего, решив это уравнение относительно вновь введенного y, находим обратную функцию

$$y = \frac{2x+5}{3}.$$

Пример 2. Найти функцию, обратную функции $y = 2^x$.

Решение. Поменяем ролями аргумент и функцию, тогда получим равенство

$$x = 2^y,$$

откуда по определению логарифма находим обратную функцию

$$y = \log_2 x.$$

Пример 3. Найти функцию, обратную функции $y = x^2$.

Решение. Поменяв ролями аргумент и функцию, получим

$$x = y^2,$$

откуда

$$y = \pm\sqrt{x}.$$

В примерах 1 и 2 как прямая, так и обратная функция однозначны, а в примере 3 прямая функция однозначна, а обратная двузначна.

Укажем условие, при котором обратная функция будет однозначной.

Если функция $y = f(x)$ однозначна в промежутке $[a, b]$ и только возрастает (или только убывает), то обратная ей функция $y = \varphi(x)$ будет однозначной и соответственно возрастающей (убывающей).

2. Функция $y = \operatorname{Arcsin} x$. Для тригонометрической функции $y = \sin x$, рассматриваемой в интервале $-\infty < x < +\infty$, переход к однозначной обратной функции невозможен, так как одному значению y соответствует бесчисленное множество значений аргумента x. Поэтому обратная функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ при каждом значении x, лежащем на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$, имеет бесчисленное множество значений.

При изучении функции, обратной синусу, выбирают отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, на котором функция $y = \sin x$ возрастает, и рассматривают соответствующую этому отрезку обратную функцию

$$y = \arcsin x,$$

которую называют *главным значением функции* $\operatorname{Arcsin} x$ (см. § 85).

Обратной тригонометрической функцией $y = \arcsin x$, называют дугу (угол) y, взятую на отрезке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, синус которой равен x. Другими словами, равенства

$$y = \arcsin x \text{ и } \sin y = x$$

эквивалентны.

Основные свойства функции $y = \arcsin x$.

а) Функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

б) На отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$ функция $y = \arcsin x$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, т. е.

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant +\frac{\pi}{2}.$$

в) $y = \arcsin x$ функция нечетная, т. е.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

г) Все значения дуг (углов), синус которых равен x, определяются формулой:

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^n \arcsin x + \pi n, \qquad (111)$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

График функции $y = \arcsin x$ приведен на рис. 355, а график функции $y = \operatorname{Arcsin} x$ — на рис. 356.

3. Функция $y = \operatorname{Arccos} x$. *Обратной тригонометрической функцией* $y = \arccos x$ называют дугу (угол) y, взятую из отрезка $[-\pi, +\pi]$, косинус которой равен x, т. е. равенства

$$y = \arccos x \text{ и } \cos y = x.$$

эквивалентны.

Основные свойства функции $y = \arccos x$:

а) Функция определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

б) На отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$ функция убывает от π до 0, т. е. $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$.

в) Для $\arccos x$ имеет место равенство:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

т. е. свойством четности или нечетности эта функция не обладает.

г) Функция $y = \arccos x$ называется главным значением функции $y = \operatorname{Arccos} x$.

Все значения дуг (углов), косинус которых равен x, определяются формулой

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2\pi n, \quad (112)$$

где $n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$.

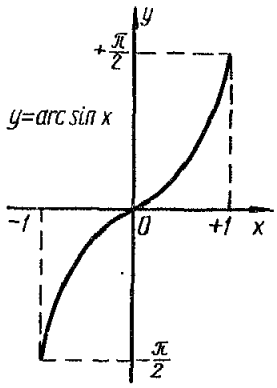


Рис. 355.

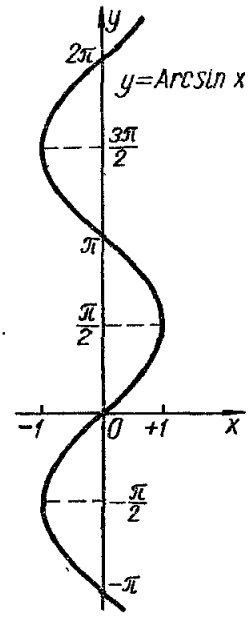


Рис. 356.

Графики функций $y = \arccos x$ и $y = \operatorname{Arccos} x$ приведены на рис. 357 и 358.

4. Функция $y = \operatorname{Arctg} x$. *Обратной тригонометрической функцией* $y = \operatorname{arctg} x$ называют дугу (угол), взятую из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которой равен x, т. е. равенства

$$y = \operatorname{arctg} x \text{ и } \operatorname{tg} y = x$$

эквивалентны.

Основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

а) Функция определена на множестве всех действительных чисел, т. е. $-\infty < x < +\infty$.

б) В интервале $-\infty < x < +\infty$ функция возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, т. е. $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < +\frac{\pi}{2}$.

в) $y = \operatorname{arctg} x$ — функция нечетная:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$$

г) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ называется главным значением функции $y = \operatorname{Arctg} x$.

Все значения дуг (углов), тангенс которых равен x, определяются формулой

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi n, \text{ где } n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \quad (113)$$

Графики функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{Arctg} x$ приведены на рис. 359 и 360.

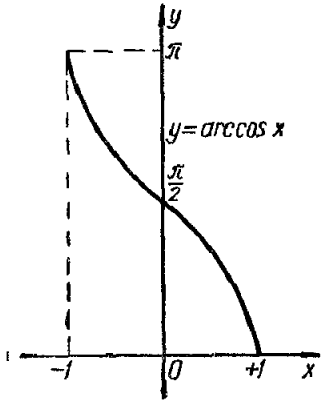


Рис. 357.

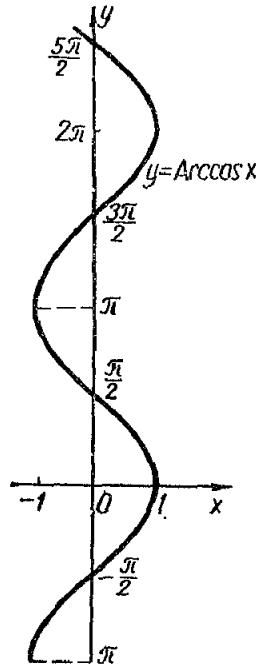


Рис. 358.

5. Функция $y = \operatorname{Arcctg} x$. Обратной тригонометрической функцией $y = \operatorname{arcctg} x$ называется дуга (угол), взятая из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которой равен x, т. е. равенства

$$y = \operatorname{arcctg} x \text{ и } \operatorname{ctg} y = x$$

эквивалентны.

Основные свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

а) Функция определена при всех действительных значениях x, т. е. $-\infty < x < +\infty$.

б) В интервале от $-\infty < x < +\infty$ функция убывает от π до 0, т. е. $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.

в) Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ (как и функция $y = \arccos x$) не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности, но для нее справедливо равенство

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

г) Функцию $y = \operatorname{arcctg} x$ называют главным значением функции $y = \operatorname{Arcctg} x$. Все значения дуг (углов), котангенс которых равен x, определяются формулой

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n, \text{ где } n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \quad (114)$$

Графики функций $y = \operatorname{arcctg} x$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$ приведены на рис. 361 и 362.

6. Основные соотношения для обратных тригонометрических функций:

а)

$$\sin(\arcsin x) = x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant +1; \quad (115)$$

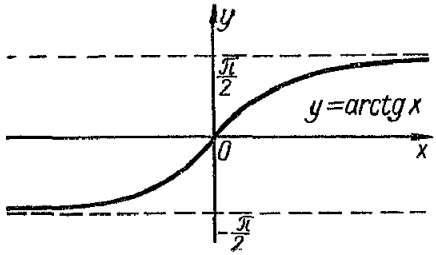


Рис. 359.

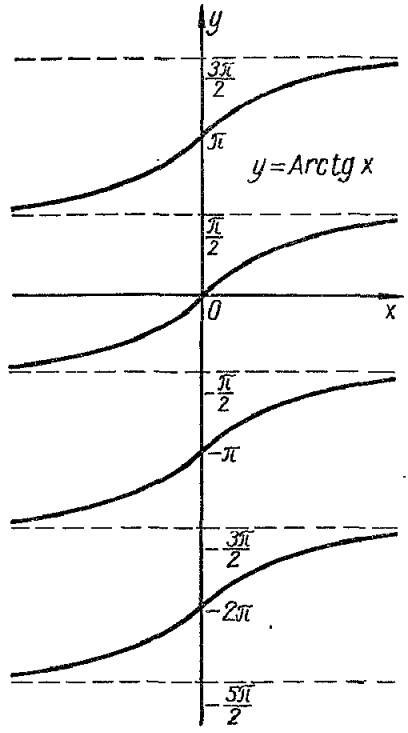


Рис. 360.

$$\cos(\arccos x) = x, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant +1; \quad (116)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \text{ если } -\infty < x < +\infty; \quad (117)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \text{ если } -\infty < x < +\infty. \quad (118)$$

б)

$$\arcsin(\sin x) = x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}; \quad (119)$$

$$\arccos(\cos x) = x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant +\pi; \quad (120)$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad \text{если} \quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}; \tag{121}$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad \text{если} \quad 0 < x < +\pi. \tag{122}$$

в)

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{если} \quad -1 \leqslant x \leqslant +1; \tag{123}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x =$$

$$= \frac{\pi}{2}, \quad \text{если} \quad -\infty < x < +\infty. \tag{124}$$

г)

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \tag{125}$$

если $0 < x < +1$;

$$\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{126}$$

если $0 < x < +1$.

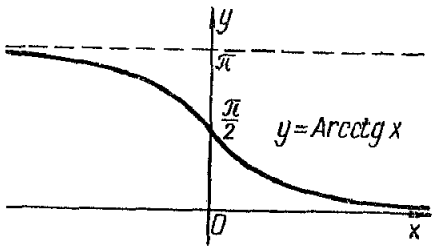


Рис. 361.

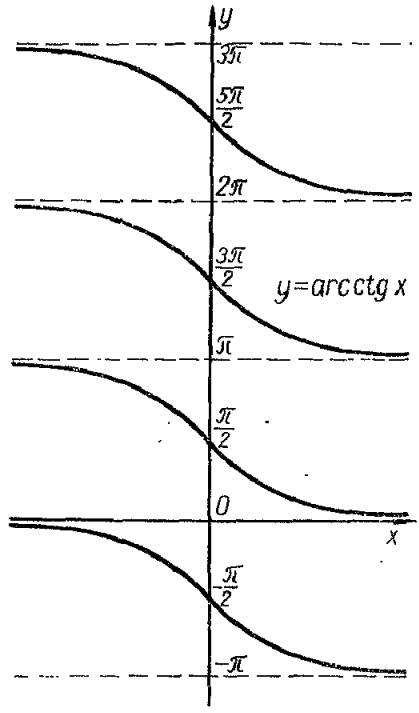


Рис. 362.

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{127}$$

если $0 < x < +\infty$;

$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{128}$$

если $0 < x < +\infty$.

д)

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \tag{129}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x; \tag{130}$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \tag{131}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \tag{132}$$

7. Формулы сложения и вычитания для обратных тригонометрических функций

$$\arcsin x + \arcsin y =$$

$$= \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } xy \leqslant 0 \\ & \text{или } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x > 0,\ y > 0 \\ & \text{и } x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x < 0,\ y < 0 \\ & \text{и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \tag{133}$$

$$\arcsin x - \arcsin y =$$

$$= \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } xy \geqslant 0 \\ & \text{или } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x > 0,\ y < 0 \\ & \text{и } x^2 + y^2 > 1, \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } x < 0,\ y > 0 \\ & \text{и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \tag{134}$$

$$\arccos x + \arccos y =$$

$$= \begin{cases} \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & \text{если } x + y \geqslant 0, \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & \text{если } x + y < 0. \end{cases} \tag{135}$$

$$\arccos x - \arccos y =$$

$$= \begin{cases} -\arccos\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & \text{если } x \geqslant y, \\ +\arccos\left(xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right), & \text{если } x < y. \end{cases} \tag{136}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{если } xy < 1, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{если } x > 0 \text{ и } xy > 1, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{если } x < 0 \text{ и } xy > 1. \end{cases} \tag{137}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{если } xy > -1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x > 0 \text{ и } xy < -1, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{если } x < 0 \text{ и } xy < -1. \end{cases} \tag{138}$$

8. Формулы удвоения для обратных тригонометрических функций

$$2\arcsin x = \begin{cases} \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } |x| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } +\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x \leqslant +1, \\ -\pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{если } -1 < x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \tag{139}$$

$$2\arccos x = \begin{cases} \arccos\left(2x^2-1\right), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant +1, \\ 2\pi - \arccos\left(2x^2-1\right), & \text{если } -1 \leqslant x < 0. \end{cases} \tag{140}$$

$$2\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}, & \text{если } |x| < 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}, & \text{если } x > +1, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}, & \text{если } x < -1. \end{cases} \tag{141}$$

Рассмотрим несколько упражнений на обратные тригонометрические функции.

Пример 1. Показать, что

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Учитывая, что $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} < 1$, согласно формуле (137) сложим сначала

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}} = \operatorname{arctg} \frac{4}{7},$$

а затем, так как $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}<1$,

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}=\operatorname{arctg}\frac{3}{11}.$$

Тогда

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\frac{4}{7}+\operatorname{arctg}\frac{3}{11}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}<1\right),$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Показать, что

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}.$$

Решение. Так как $\sqrt{\frac{2}{3}}<\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$, то применяя формулу (136), получим

$$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{7+2\sqrt{6}}{12}\right)}\right)=\arccos\left(\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{6}\right)=\arccos\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{6}=$$

$$=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6},$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать, что

$$\arccos x=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant+1,\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1\leqslant x<0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Обозначим $\arccos x = \alpha$, тогда $\cos\alpha = x$, причем $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Зная $\cos\alpha = x$, найдем

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

или

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - x^2}.$$

Далее имеем

$$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin\sqrt{1 - x^2}.$$

Теперь рассмотрим два случая:

а) Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, т. е. $0 \leqslant x \leqslant +1$, то согласно формуле (119)

$$\arcsin(\sin\alpha) = \alpha$$

и тогда

$$\alpha = \arcsin\sqrt{1 - x^2},$$

следовательно, учтя введенное нами обозначение, получаем

$$\alpha = \arccos x = \arcsin\sqrt{1 - x^2}.$$

б) Если $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$, т. е. $-1 \leqslant x < 0$, то по формулам приведения заменим

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha),$$

где $0 \leqslant \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$, и тогда

$$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin[\sin(\pi - \alpha)] = \pi - \alpha$$

или

$$\pi - \alpha = \arcsin\sqrt{1 - x^2},$$

откуда получаем

$$\alpha = \arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1 - x^2}.$$

Таким образом,

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1 - x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant +1, \\ \pi - \arcsin\sqrt{1 - x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x < 0, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

П р и м е р 4. Решить уравнение:

$$\operatorname{arctg} 3^x - \operatorname{arctg} 3^{-x} = \frac{\pi}{6}.$$

Р е ш е н и е. Учитывая, что согласно формулам (128) и (124)

$$\operatorname{arctg} 3^{-x} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3^x} = \operatorname{arcctg} 3^x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3^x,$$

получим

$$\operatorname{arctg} 3^x - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3^x\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Отсюда (после очевидных упрощений) имеем

$$2 \operatorname{arctg} 3^x = \frac{2\pi}{3}$$

или

$$\operatorname{arctg} 3^x = \frac{\pi}{3}$$

и, следовательно,

$$3^x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

т. е.

$$3^x = 3^{\frac{1}{2}}; \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Пример 5. Решить неравенство: $\arcsin x - 2 \arccos x > \frac{\pi}{3}$.

Решение: Заменив в левой части неравенства

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

находим, что

$$3 \arcsin x > \frac{4\pi}{3}$$

или

$$\arcsin x > \frac{4\pi}{9},$$

откуда и получаем окончательный ответ:

$$\sin \frac{4\pi}{9} < x \leqslant +1.$$

Пример 6. Решить уравнение $\sin(5 \operatorname{arctg} 3x) = 1$.

Решение. Обозначим $5 \operatorname{arctg} 3x = t$, тогда

$$-\frac{5\pi}{2} < t < +\frac{5\pi}{2},$$

и данное уравнение принимает вид

$$\sin t = 1,$$

откуда

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ где } n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Найдем, при каких значениях n величина t будет удовлетворять условию $-\frac{5}{2}\pi < t < +\frac{5}{2}\pi$.

Решим неравенство:

$$-\frac{5}{2}\pi < \frac{\pi}{2} + 2\pi n < +\frac{5}{2}\pi,$$

откуда

$$-6 < 4n < 4 \quad \text{или} \quad -\frac{3}{2} < n < 1,$$

т. е. $n = -1; 0$.

а) При $n = -1$ находим $t = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$, так что

$$5 \operatorname{arctg} 3x = -\frac{3\pi}{2}$$

или

$$\operatorname{arctg} 3x = -\frac{3\pi}{10},$$

следовательно,

$$3x = -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10},$$

$$x = x_1 = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}.$$

б) При $n = 0$ находим $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 0 = \frac{\pi}{2}$ и тогда

$$5 \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{10},$$

следовательно,

$$3x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$$

или

$$x = x_2 = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10} = -\frac{1}{3}\operatorname{tg}54^\circ \approx \frac{-1{,}37638}{3} = -0{,}45879;$

$x_2 = +\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} = +\frac{1}{3}\operatorname{tg}18^\circ \approx \frac{+0{,}32492}{3} = +0{,}10831.$

В заключение данного параграфа отметим, что обратные тригонометрические функции часто называют также *обратными круговыми функциями*.

§ 93. Решение прямолинейных треугольников

Условимся, как это принято, обозначать элементы прямолинейного треугольника* с вершинами A, B, C следующими буквами (рис. 363).

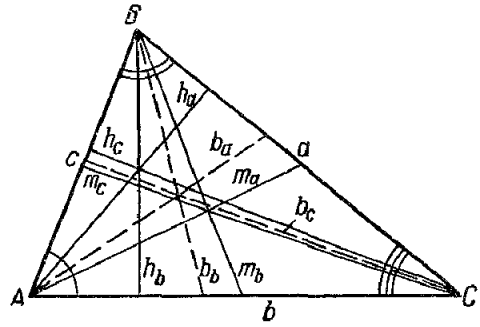


Рис. 363.

A, B, C — внутренние углы треугольника,

a, b, c — соответствующие стороны, противоположные углам треугольника,

h_a, h_b, h_c — высоты треугольника относительно сторон a, b и c,

b_a, b_b, b_c — биссектрисы внутренних углов,

m_a, m_b, m_c — соответствующие медианы,

$p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника,

S — площадь треугольника,

R — радиус описанной окружности,

r — радиус вписанной окружности,

r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей**.

---

* Кроме прямолинейных треугольников подробно изучены также треугольники сферические, т. е. треугольники, расположенные на сфере, которые наиболее широкое применение нашли в астрономии. Однако вопросы сферической тригонометрии выходят за рамки данной книги и поэтому здесь рассматриваться не будут.

** *Вневписанной* к стороне a треугольника ABC окружностью называется окружность, касающаяся стороны a и продолжения сторон b и c (см. § 13, рис 28).

1. Основные теоремы и формулы о соотношениях между элементами треугольника.

Сумма внутренних углов:

$$A + B + C = \pi = 180^\circ. \tag{142}$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{143}$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \tag{144}$$

Теорема тангенсов:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}. \tag{145}$$

Формулы Мольвейде:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}; \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}. \tag{146}$$

Формулы половинных углов:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \tag{147}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \tag{148}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}. \tag{149}$$

Формулы для высот треугольника:

$$h_a = b \sin C = c \sin B. \tag{150}$$

Формулы для вычисления биссектрис:

$$b_a = \frac{h_a}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{b \sin C}{\cos\frac{B-C}{2}}; \tag{151}$$

$$b_a = \frac{2bc}{b+c} \cos\frac{A}{2}. \tag{152}$$

Формула для вычисления медиан:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}. \tag{153}$$

Формулы для вычисления площади:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin A\sin C}{\sin B} = p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}. \tag{154}$$

Формулы для вычисления радиуса описанной окружности:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}; \tag{155}$$

$$R = \frac{a+b+c}{8\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}. \tag{156}$$

Формулы для вычисления радиуса вписанной окружности:

$$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}; \tag{157}$$

$$r = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}; \tag{158}$$

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \tag{159}$$

Формулы для радиусов вневписанных окружностей:

$$r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}. \tag{160}$$

Замечание. Для высот, биссектрис, медиан и радиусов вневписанных окружностей мы привели только по одной из трех возможных формул. Все остальные формулы получаем из формул (150) — (153) и (160) путем циклической перестановки.

т. е. замены $a \to b \to c \to a$ и соответственно $A \to B \to C \to A$.

Например, из формулы (153) имеем:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + a^2 + 2ca\cos B};$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos C};$$

из формулы (160)

$$r_b = p\operatorname{tg}\frac{B}{2}; \quad r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Эту же циклическую перестановку можно применять и к формулам (144) — (149) и (154).

2. Основные случаи решения прямолинейных треугольников. *Основными случаями решения треугольников* называются задачи на вычисление элементов треугольника по трем данным его независимым основным элементам. К основным элементам относят стороны и внутренние углы треугольника, причем углы между собой связаны соотношением $A + B + C = \pi$, поэтому только два угла могут быть независимыми.

Случай I. Даны два угла A и B и одна из сторон треугольника, например, c; вычислить остальные основные его элементы.

Решение. Если даны два угла треугольника, то третий находится из равенства (142):

$$C = \pi - (A + B).$$

После того как третий угол определен, две неизвестные стороны треугольника находятся по теореме синусов (143):

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C}; \quad b = \frac{c\sin B}{\sin C}.$$

Случай II. Даны две стороны треугольника и угол между ними; найти остальные основные элементы треугольника.

Решение. Пусть даны стороны a и b и угол C. Так как $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2}$, то по теореме тангенсов (145) имеем:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}.$$

Отсюда

$$A - B = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right),$$

а согласно формуле (142)

$$A + B = \pi - C.$$

Из последних двух равенств, сначала сложив их, а затем, вычтя одно из другого, находим углы A и B. Зная углы A и B, по теореме синусов (143) находим третью сторону

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Эту задачу можно решать и другими способами, например, применяя теорему синусов, имеем

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin [\pi - (A + C)]}{\sin A} = \frac{\sin (A + C)}{\sin A},$$

откуда, воспользовавшись формулой (35) § 67, получим

$$\frac{\sin A \cos C + \cos A \sin C}{\sin A} = \cos C + \operatorname{ctg} A \sin C = \frac{b}{a}$$

или после очевидных преобразований

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b - a \cos C}{a \sin C}.$$

Из последнего равенства находим угол A, а затем остальные элементы треугольника.

Случай III. Даны три стороны треугольника a, b, c. Вычислить его углы.

Решение. Необходимым и достаточным условием существования треугольника будет выполнение неравенств

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a \quad (a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0).$$

Если эти условия выполняются, то углы A и B найдем по формуле (148), применив к ней при переходе к углу B циклическую перестановку,

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}};$$

затем находим угол C из равенства $A + B + C = \pi$.

Случай IV. Даны две стороны и угол, противолежащий одной из данных сторон; вычислить остальные основные элементы треугольника.

Решение. Пусть даны a, b и B. При решении этой задачи рассмотрим следующие случаи.

а) Если $b \geqslant a$, то задача имеет единственное решение. Угол $A \leqslant B$ и по теореме синусов (143) имеем

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

откуда находим $\sin A$, а затем угол A.

Угол C находим из равенства $A + B + C = \pi$, а затем сторону c по теореме синусов

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

б) Если $a > b > a \sin B$, то задача имеет два решения, т. е. существует два треугольника, соответствующих данным задачи (рис. 364).

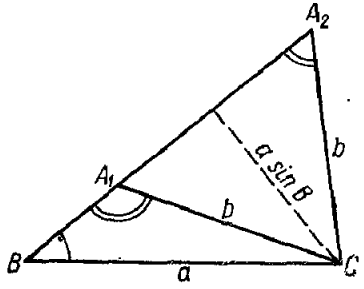


Рис. 364.

В этом случае из равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

находим

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} \quad \left(\frac{a \sin B}{b} < 1\right),$$

откуда определяем два значения угла A:

$$A = A_1 \text{ и } A = A_2 = \pi - A_1.$$

Аналогично предыдущему случаю находим угол C и сторону c соответственно каждому из найденных углов A_1 и A_2.

в) Если $b = a \sin B$, то задача имеет одно решение, и в этом случае треугольник будет прямоугольным, так как в данном случае

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = 1$$

и, следовательно,

$$A = \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } A_2 = A_1 = \frac{\pi}{2} = 90°.$$

Тогда

$$C = \frac{\pi}{2} - B \text{ и } c = a \cos B.$$

г) Если $b < a \sin B$, то задача решений не имеет, т. е. треугольник не существует, так как

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} > 1.$$

Графически условие $a \sin B > b$ означает, что перпендикуляр $a \sin B$ должен быть больше наклонной b (рис. 364), что, конечно, невозможно.

Все остальные задачи на решение треугольников считаются не основными и при решении их сводят к основным случаям. Некоторые из неосновных задач мы рассмотрим в следующих параграфах.

Переходим теперь к решению прямоугольных треугольников, т. е. частного случая треугольников, у которых всегда

$$C = 90°, \cos C = 0, \sin C = 1.$$

Подставив эти значения в формулы (142) — (160), получаем соответствующие формулы для прямоугольных треугольников, что читателю полезно выполнить в виде упражнения. В частности, подставив эти значения в формулы (142) — (144), получаем основную систему для решения прямоугольных треугольников:

$$A + B = 90°, \text{ так что } \sin A = \cos B, \cos A = \sin B; \tag{161}$$

$$a = c \sin A = c \cos B; \quad b = c \sin B = c \cos A; \tag{162}$$

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{163}$$

Разделив равенства (162) по очереди одно на другое, получим еще две формулы, которые связывают элементы прямоугольного треугольника

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B. \tag{164}$$

Для того чтобы решить прямоугольный треугольник, достаточно задать только два его элемента (но при этом хотя бы один элемент обязательно должен быть линейным), так как уже известен один элемент: угол C — прямой. Никаких новых трудностей решение прямоугольных треугольников не представляет, поэтому рассмотрим только несколько типичных задач.

Задача 1. Даны катеты $a = 7$ и $b = 12$. Определить все остальные основные элементы прямоугольного треугольника.

Решать эту задачу можно двумя способами.

1) Воспользовавшись теоремой Пифагора (163), по заданным катетам определяем гипотенузу $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а потом находим

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ и } \sin B = \frac{b}{c},$$

по которым определяем углы A и B. Полученные результаты контролируем при помощи равенства $A + B = 90°$.

2) Согласно первому равенству (164), вычисляем

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b},$$

после чего определяем угол A, а затем $B = 90° - A$; $c = \frac{a}{\sin A}$. Результаты вычислений контролируем при помощи формулы (163):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Выполните фактические вычисления в данной задаче.

Задача 2. Определить высоту Московского университета, самого высокого университетского здания в мире, измерив базис $b = 119$ *м* и угол зрения $A = 60°$.

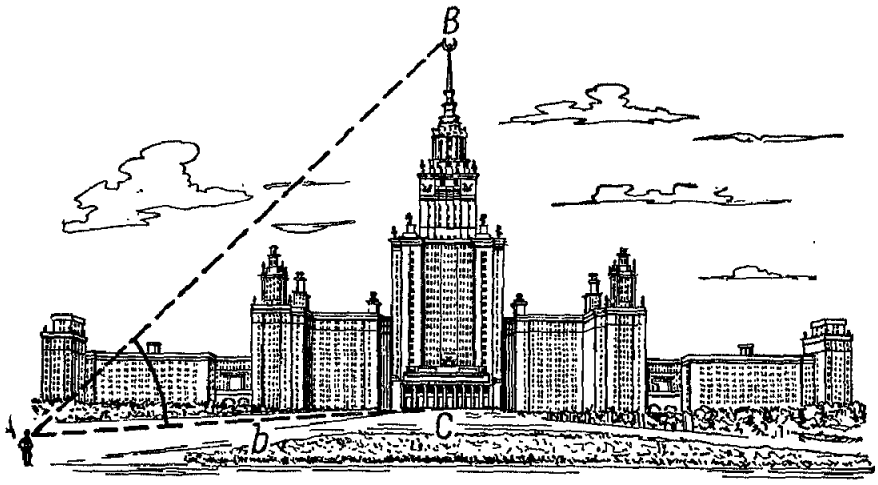


Рис. 365.

Решение. Из прямоугольного треугольника ABC по известному катету b и углу A находим катет a (рис. 365):

$$a = b \operatorname{tg} A = b\sqrt{3} \approx 206 \text{ м}.$$

К полученному результату прибавляем величину роста наблюдателя.

Задача 3. Определить углы «египетского треугольника», т. е. треугольника* со сторонами $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

---

* Древним египтянам было известно, что треугольник со сторонами 3; 4; 5 — прямоугольный. Этим они пользовались в строительстве. Прямой угол строили так: брали веревку и на ней в точках A, B, C, D завязывали узлы так, чтобы $AB = 5$, $BC = 4$, $CD = 3$. Расположив отрезок CB вдоль заданного направления и соединив узлы A и D туго натянутой веревки, получали треугольник, у которого угол C прямой.

Решение. Согласно формуле (164), имеем:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = 0{,}7500.$$

По известному тангенсу, пользуясь табл. I приложения, находим с точностью до 0,1 градуса

$A = 36°{,}9 = 36°\ 54'$, тогда

$$B = 90° - A = 53°{,}1 = 53°\ 6'.$$

Упражнения

Решить прямоугольные треугольники:

а) даны катет и гипотенуза $a = 2{,}5$ *м*; $c = 3{,}7$ *м*;
б) даны угол и гипотенуза $A = 39°$; $c = 138{,}1$ *см*;
в) даны угол и катет $A = 57°$; $b = 17{,}8$ *дм*;
г) даны два катета $a = 27{,}5$ *см*, $b = 83{,}4$ *см*.

§ 94. Применение тригонометрии к решению планиметрических задач

Соотношения между элементами треугольника, приведенные в предыдущем параграфе, применяются к решению самых разнообразных планиметрических задач, так как любую прямолинейную фигуру всегда можно разбить на ряд треугольников. Рассмотрим несколько задач.

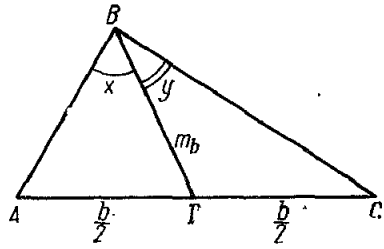


Рис. 366.

Задача 1. Доказать, что медиана треугольника делит угол при вершине на части, синусы которых пропорциональны синусам соответствующих углов при основании.

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ BD — медиана (рис. 366). Обозначим $\angle ABD = x$, $\angle DBC = y$. Требуется доказать, что

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A}{\sin C}.$$

Применяя теорему синусов к треугольникам ABD и BDC, получим:

$$\frac{\sin x}{\sin A} = \frac{b}{2m_b} \quad \text{и} \quad \frac{\sin y}{\sin C} = \frac{b}{2m_b}.$$

Отсюда

$$\frac{\sin x}{\sin A} = \frac{\sin y}{\sin C}$$

или

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin A}{\sin C},$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать, что если в треугольнике со сторонами a, b, c имеет место соотношение

$$b^2 - c^2 = 2aR, \text{ то } B - C = 90°.$$

Решение. Согласно формуле (155) § 93, имеем:

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C.$$

Подставляя эти значения в соотношение, приведенное в условии задачи, получим:

$$4R^2 \sin^2 B - 4R^2 \sin^2 C = 4R^2 \sin A$$

или

$$\sin^2 B - \sin^2 C = \sin A.$$

Преобразуем левую часть последнего равенства, воспользовавшись вначале формулами (78) и (79) § 73, а затем формулой (59) § 70.

$$\sin^2 B - \sin^2 C = (\sin B + \sin C)(\sin B - \sin C) =$$

$$= 4 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} = \sin (B + C) \sin (B - C).$$

Тогда в соответствии с преобразованным исходным условием находим, что

$$\sin (B + C) \sin (B - C) = \sin A,$$

откуда, учтя, что $B + C = \pi - A$ и $\sin (B + C) = \sin (\pi - A) = \sin A$, получим:

$$\sin A \sin (B - C) = \sin A$$

или

$$\sin (B - C) = 1$$

и, следовательно, $B - C = 90°$, что и требовалось доказать.

Задача 3. Доказать, что прямая, симметричная с медианой относительно биссектрисы внутреннего угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон.

Решение. Пусть в $\triangle ABC$ BD — медиана, а BL — биссектриса угла B и прямая BN симметрична относительно BL с медиа-

ной BD, т. е. $\angle NBL = \angle LBD$ (рис. 367). Доказать, что $AN : NC = AB^2 : BC^2$.

Обозначим $\angle ABN = \omega$ и $\angle NBL = \delta$, тогда, согласно условиям задачи,

$$\angle NBL = \angle LBD = \delta \text{ и } \angle ABN = \angle DBC = \omega.$$

Так как у треугольников ABN и NBC высоты равны, то отрезки AN и NC относятся как площади этих треугольников, и тогда, согласно формуле (154) § 93, имеем:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{\frac{1}{2} c \cdot BN \sin \omega}{\frac{1}{2} a \cdot BN \sin (\omega + 2\delta)} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\sin \omega}{\sin (\omega + 2\delta)}.$$

Далее, воспользовавшись результатом задачи 1 и теоремой синусов, можно записать, что

$$\frac{\sin \omega}{\sin (\omega + 2\delta)} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a},$$

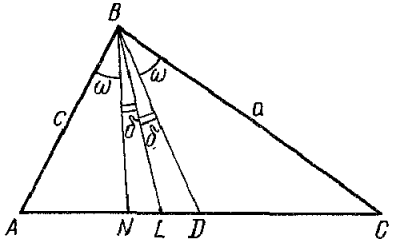


Рис. 367.

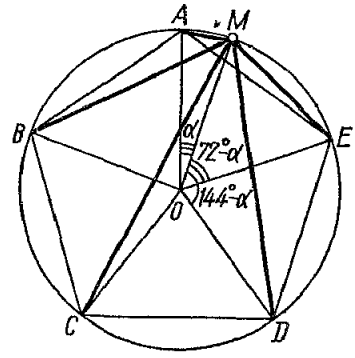


Рис. 368.

а в таком случае, подставляя в предыдущее равенство вместо отношения синусов отношение сторон треугольника, получим:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c^2}{a^2}$$

или

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AB^2}{BC^2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 4. Доказать, что сумма квадратов длин хорд, соединяющих произвольную точку окружности радиуса R с вершинами правильного вписанного в эту окружность пятиугольника, равна $10R^2$.

Решение. Пусть на рис. 368 правильный пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность O радиуса $OA = R$. Произвольная

точка окружности M соединена с вершинами пятиугольника отрезками прямых MA, MB, MC, MD, ME. Требуется доказать, что

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + ME^2 = 10R^2.$$

Соединим центр окружности с вершинами пятиугольника и с точкой M. Угол AOM обозначим через α, т. е. $\angle AOM = \alpha$, тогда

$$\angle MOB = 72^\circ + \alpha;\ \angle MOC = 144^\circ + \alpha;\ \angle MOD = 144^\circ - \alpha;$$
$$\angle MOE = 72^\circ - \alpha,$$

так как центральный угол правильного пятиугольника равен 72°. По теореме косинусов (т. е. по формуле (144) § 93), учтя, что $OA = OB = OC = OD = OE = OM = R$, из треугольников MOA, MOB, MOC, MOD и MOE находим:

$$AM^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha,$$
$$BM^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (72^\circ + \alpha),$$
$$CM^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (144^\circ + \alpha),$$
$$DM^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (144^\circ - \alpha),$$
$$EM^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (72^\circ - \alpha).$$

Складывая эти равенства, получим:

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 + EM^2 = 10R^2 - 2R^2 \times$$
$$\times [\cos \alpha + \cos (72^\circ + \alpha) + \cos (144^\circ + \alpha) + \cos (144^\circ - \alpha) + \cos (72^\circ - \alpha)].$$

Покажем, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Действительно, сгруппировав члены равноудаленные от концов и, воспользовавшись формулой (80) § 73 и второй из формул приведения (43) § 68, имеем:

$$\cos \alpha + \cos (72^\circ + \alpha) + \cos (144^\circ + \alpha) + \cos (144^\circ - \alpha) + \cos (72^\circ - \alpha) =$$
$$= [\cos \alpha + \cos (72^\circ - \alpha)] + [\cos (72^\circ + \alpha) + \cos (144^\circ - \alpha)] +$$
$$+ \cos (144^\circ + \alpha) = 2 [\cos 36^\circ \cos (36^\circ - \alpha) + \cos 108^\circ \cos (36^\circ - \alpha)] -$$
$$- \cos (36^\circ - \alpha) = \cos (36^\circ - \alpha) [2 (\cos 36^\circ + \cos 108^\circ) - 1] =$$
$$= \cos (36^\circ - \alpha) [4 \cos 72^\circ \cos 36^\circ - 1] = 0,$$

так как $144^\circ + \alpha = 180^\circ - (36^\circ - \alpha)$, а согласно формуле (59) § 70:

$$4 \cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{4 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} =$$
$$= \frac{\sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = +1.$$

В таком случае

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 + EM^2 = 10R^2,$$

что и требовалось доказать

Задача 5. Определить углы равнобедренного треугольника, зная, что его ортоцентр лежит на вписанной в треугольник окружности.

Решение. На рис. 369 изображен равнобедренный треугольник ABC, $AC = CB$, в который вписана окружность O и ортоцентр H, т. е. точка пересечения высот треугольника лежит на дуге этой окружности. Требуется определить углы треугольника. Угол A треугольника ABC обозначим через 2α, тогда $\angle OAD = \alpha$. Из прямоугольного треугольника ACD находим $\angle ACD = 90° - 2\alpha$, тогда и $\angle DCB = 90° - 2d$. Треугольник CHE прямоугольный (AE — высота), поэтому $\angle CHE = 2\alpha$, стороны которого взаимно перпендикулярны сторонам $\angle DCB$, и вертикальный ему $\angle AHD = 2\alpha$. Из $\triangle ADH$:

$$\frac{2r}{AD} = \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

где $r = OD$ — радиус вписанной окружности,
а из $\triangle AOD$:

$$\frac{r}{AD} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Сопоставляя два последних равенства, находим, что

$$2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

или

$$2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha},$$

откуда

$$5 \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$$

и, следовательно,

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Таким образом,

$$A = B = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5},$$

а тогда

$$C = \pi - (A + B) = \pi - 2A.$$

Ответ: $A = B = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 2 \operatorname{arctg}\ 0{,}447214 = 2 \cdot 0{,}420534 =$ $= 0{,}841068$ радианов $= 48° 11', 38$; $C = \pi - 2A = 1{,}459457$ радианов $=$ $= 83° 37', 24$.

Задача 6. Доказать, что периметр треугольника, образованного соединением оснований высот данного треугольника, равен $\frac{2S}{R}$, где S — площадь треугольника, а R — радиус описанной окружности.

Решение. Дан треугольник ABC и AD, BE, CF — его высоты (рис. 370). Доказать, что

$$FD + DE + EF = \frac{2S}{R}.$$

Из планиметрии известно, что

$$\triangle ABC \sim \triangle BFD \sim \triangle DEC \sim \triangle AFE.$$

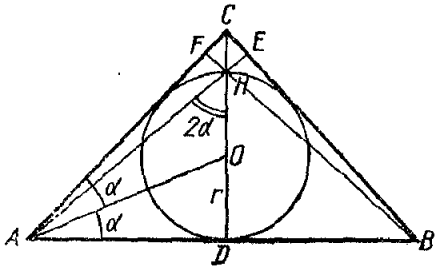


Рис. 369.

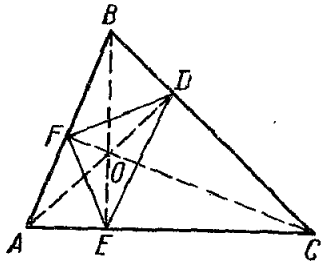


Рис. 370.

Из подобия этих треугольников находим:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EC}{BC},$$

но из прямоугольного треугольника BEC

$$\frac{EC}{BC} = \cos C.$$

Тогда $\frac{DE}{AB} = \cos C$ или $DE = c \cdot \cos C$.

Аналогично находим, что

$$DF = b \cos B,$$
$$FE = a \cos A.$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$DE + DF + FE = a \cos A + b \cos B + c \cos C.$$

Но, согласно формуле (155) § 93,

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C,$$

так что

$$DE + DF + FE = 2R \sin A \cos A + 2R \sin B \cos B + 2R \sin C \cos C = \\ = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

Снова заменяя

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \quad \sin B = \frac{b}{2R}; \quad \sin C = \frac{c}{2R},$$

и учитывая, что $S = \frac{abc}{4R}$, получаем окончательно

$$DE + DF + FE = 4R \cdot \frac{abc}{8R^3} = \frac{abc}{2R^2} = \frac{2 \cdot \frac{abc}{4R}}{R} = \frac{2S}{R},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Из доказанного следует, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника, на радиус окружности, описанной вокруг данного треугольника.

Задача 7. Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Доказать.

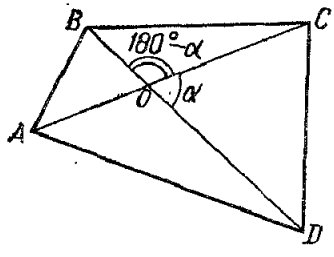


Рис. 371.

Решение. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и его диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$ (рис. 371), причем угол между диагоналями $\angle COD = \alpha$. Определить площадь четырехугольника. Найдем, согласно первой из формул (154) § 93, площади треугольников

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \alpha,$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin (180° - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin \alpha,$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin \alpha,$$

$$S_{DOA} = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin (180° - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin \alpha.$$

Сложив эти равенства, получаем:

$$S = \frac{1}{2}\sin\alpha\,[AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + DO \cdot OA] =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha\,(AO + OC)\,(BO + OD) = \frac{1}{2}\,AC \cdot BD \quad \sin\alpha.$$

Таким образом, площадь четырехугольника

$$S = \frac{1}{2}\,d_1 d_2 \sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

§ 95. Применение тригонометрии к решению стереометрических задач

Разнообразие стереометрических задач на применение тригонометрии не дает возможности указать общие способы их решения. В каждом отдельном случае, исходя из условий задачи, выбирается тот или иной способ решения. Как правило, большинство стереометрических задач, решаемых с применением тригонометрии, допускает много различных способов решения.

При решении стереометрических задач в пространственной фигуре, как правило, выделяют треугольники с достаточным числом известных элементов; решая их, определяют искомые элементы пространственной фигуры.

Рассмотрим несколько наиболее типичных стереометрических задач, решаемых с помощью тригонометрии.

З а д а ч а 1. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого a составляет с плоскостью основания угол α, а с большей боковой гранью угол β. Вычислить этот объем при $a = 15{,}7$ *см*; $\alpha = 42°$; $\beta = 36°$ и при $a = 2{,}3$ *м*; $\alpha = 58°$; $\beta = 27°$.

Р е ш е н и е. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 372), у которого диагональ $BD_1 = a$, $\angle D_1BD = \alpha$ и $\angle A_1BD_1 = \beta$. Найти объем параллелепипеда.

Объем параллелепипеда

$$V = SH,$$

где S — площадь основания, а H — высота параллелепипеда. Из $\triangle D_1BD$ ($\angle D = 90°$) находим:

$$H = DD_1 = BD_1 \sin\alpha = a\sin\alpha.$$

Из $\triangle BA_1D$ ($\angle A_1 = 90°$) получаем:

$$A_1D_1 = AD = BD_1 \sin\beta = a\sin\beta$$

и соответственно,

$$A_1B = D_1B\cos\beta = a\cos\beta.$$

Из $\triangle A_1AB$ ($\angle A = 90°$) находим, учтя, что $AA_1 = DD_1 = a\sin\alpha$:

$$AB = \sqrt{A_1B^2 - A_1A^2} = \sqrt{a^2\cos^2\beta - a^2\sin^2\alpha} = a\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}.$$

Тогда

$$S = AB \cdot AD = a^2\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$$

и, следовательно,

$$V = SH = a^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}.$$

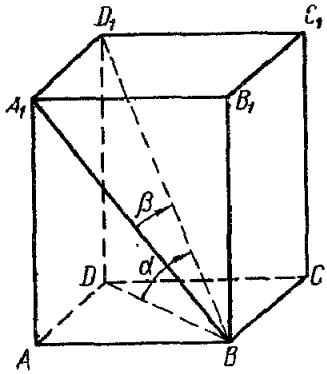


Рис. 372.

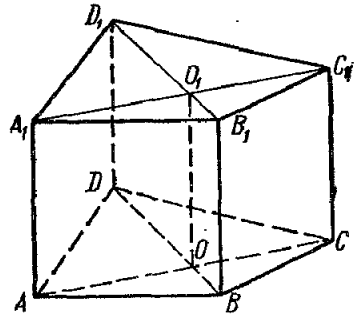


Рис. 373.

Полученный результат можно несколько упростить, так как, согласно формулам (78) и (79) § 73, формуле (59) § 70 и формулам приведения:

$$\cos^2\beta - \sin^2\alpha = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin^2\alpha =$$

$$= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\alpha\right]\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin\alpha\right] =$$

$$= 4\sin\frac{\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha}{2} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \alpha\right) = \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta).$$

Ответ: $V = a^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$ *куб. ед.*

При $a = 15{,}7$; $\alpha = 42°$; $\beta = 36°$ с четырьмя значащими цифрами $\cos(\alpha+\beta) = 0{,}2079$; $\cos(\alpha-\beta) = 0{,}9945$; $V = 692{,}1$ *см*$^3 = 0{,}6921$ *дм*^{3}. При $a = 2{,}3$ *м*; $\alpha = 58°$; $\beta = 27°$; $V = 1{,}280$ *м*^{3}.

Исследуйте, при всех ли значениях углов $0 < \alpha < 90°$ и $0 < \beta < 90°$ возможно решение этой задачи.

Задача 2. В прямой четырехугольной призме площадь основания m, площади диагональных сечений p и q, двугранный угол между ними α. Определить объем призмы.

Решение. Дана прямая четырехугольная призма AC_1, у которой $S_{ABCD} = m$, $S_{ACC_1A_1} = p$, $S_{BDD_1B_1} = q$ и двугранный угол $AA_1OO_1DD_1 = \alpha$ (рис. 373). Найти объем призмы.

Объем призмы

$$V = SH,$$

где S — площадь основания, а H — высота призмы.

Площадь основания дана по условию задачи.

$$S = m.$$

Нужно определить высоту призмы $OO_1 = H$ (призма прямая $OO_1 \perp$ пл. $ABCD$).

Диагонали основания призмы

$$AC = \frac{p}{H} \text{ и } BD = \frac{q}{H}$$

определяем по заданным площадям диагональных сечений

$$p = H \cdot AC \text{ и } q = H \cdot BD.$$

Угол $AOD = \alpha$, как линейный угол данного двугранного угла, тогда площадь четырехугольника $ABCD$ (см. § 94, задача 7):

$$m = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{H} \cdot \frac{q}{H} \cdot \sin\alpha,$$

откуда

$$H = \sqrt{\frac{pq}{2m}\sin\alpha}.$$

Найдя высоту H, определяем искомый объем

$$V = SH = \sqrt{\frac{1}{2}pqm\sin\alpha} \text{ куб. ед.}$$

Задача 3. Разность между образующей и высотой конуса равна m, а угол между ними равен α. Найти объем конуса и вычислить его значение при $m = 5{,}8$ *см* и $\alpha = 42°$.

Р е ш е н и е. Дан конус SAB, у которого $SA - SO = m$ и $\angle OSA = \alpha$ (рис. 374). Найти объем конуса.

Обозначим $OA = R$ и $OS = H$, тогда объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Из $\triangle SOA$ находим

$$H = R \operatorname{ctg} \alpha,$$

тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Для определения R рассмотрим $\triangle AOC$. В этом треугольнике $AC = m$, $\angle OAC = 90° - \alpha$, $\angle OCA = 180° - \angle SCO = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$, а $\angle AOC = 90° - \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$, так как треугольник OSC по условию задачи равнобедренный ($SO = SC$).

По теореме синусов из $\triangle AOC$ находим

$$\frac{R}{m} = \frac{\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$R = m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому для вычисления объема конуса получаем окончательную формулу:

$$V = \frac{1}{3} m^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha \text{ } куб.\ ед.$$

При $m = 5{,}8$ *см* и $\alpha = 42°$ имеем с четырьмя значащими цифрами $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 2{,}605$; $\operatorname{ctg} 42° = 1{,}111$; $\left(m \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^3 = 3449{,}1$; $V = 1277$ *см*^{3} $= 1{,}277$ *дм*^{3}.

З а д а ч а 4. Плоские углы трехгранного угла соответственно равны α, β, γ. Найти линейные углы двугранных углов.

Р е ш е н и е. Пусть углы трехгранного угла $\angle MSK = \alpha$, $\angle KSL = \beta$ и $\angle MSL = \gamma$ (рис. 375). Найдем линейный угол двугранного угла с ребром MS. Проведем из произвольной точки M ребра SM прямые $MK \perp MS$ и $ML \perp MS$, тогда $\angle KML = x$ будет искомым линейным углом двугранного угла $KMSL$.

Из $\triangle LMS$ ($\angle M = 90°$) находим:

$$LM = SM \cdot \operatorname{tg}\gamma \quad \text{и} \quad SL = SM \cdot \sec\gamma;$$

из $\triangle KMS$ ($\angle M = 90°$) находим:

$$KM = SM \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \text{и} \quad SK = SM \cdot \sec\alpha.$$

Из $\triangle KSL$ по теореме косинусов имеем:

$$KL^2 = KS^2 + LS^2 - 2 \cdot KS \quad LS \cdot \cos\beta.$$

Из $\triangle KML$ находим:

$$KL^2 = MK^2 + ML^2 - 2 \cdot MK \cdot ML \cdot \cos x.$$

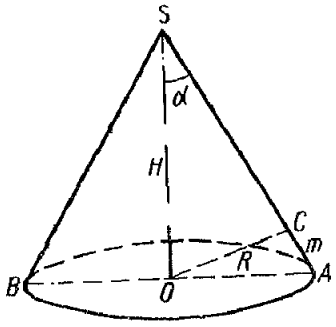


Рис. 374.

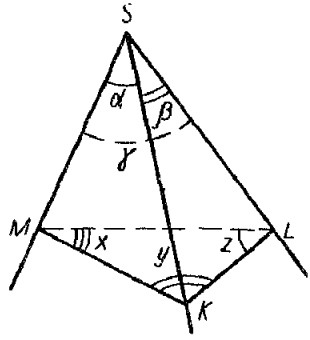


Рис. 375.

Сравнивая последние два равенства, приходим к уравнению, содержащему $\cos x$:

$$MK^2 + ML^2 - 2MK \cdot ML \cos x = KS^2 + LS^2 - 2KS \cdot LS \cos\beta,$$

откуда

$$\cos x = \frac{MK^2 + ML^2 - KS^2 - LS^2 + 2KS \cdot LS \cos\beta}{2MK \cdot ML}.$$

Подставляя сюда найденные значения для MK, ML, KS и LS, получим:

$$\cos x = \frac{SM^2 (\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\gamma - \sec^2\alpha - \sec^2\gamma + 2\sec\alpha \sec\gamma \cos\beta)}{2SM^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma} =$$

$$= \frac{2\cos\beta \sec\alpha \sec\gamma - 2}{2\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha \sin\gamma}.$$

Таким образом,

$$\cos x = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha \sin\gamma}.$$

Аналогично находятся два других линейных угла двугранных углов, которые соответственно обозначим через y и z:

$$\cos y = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\cos z = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

По найденным $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ определяем искомые линейные углы x, y, z, как было рассмотрено в пункте б) § 85, но при этом надо учесть, что углы x, y, z являются углами треугольника, так что ответ должен быть однозначным.

Задача 5. Высота шарового сегмента h; дуга в осевом сечении равна α. Определить площадь сферической поверхности сегмента.

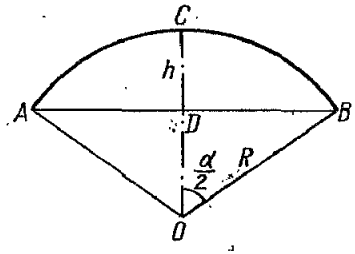


Рис. 376.

Решение. По условию задачи $CD = h$, $\angle AOB = \alpha$ (рис. 376). Найти площадь сферической поверхности сегмента (на рис. 376 — сечение сегмента). Площадь сферической поверхности сегмента

$$S = 2\pi Rh,$$

где R — радиус сферической поверхности, а h — высота сегмента.

Рассмотрим треугольник ODB, в котором $OD = R - h$, $OB = R$. Из этого треугольника находим

$$\frac{OD}{OB} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

или

$$\frac{R-h}{R} = \cos\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$R = \frac{h}{1-\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}}.$$

Подставив это значение в формулу для S, после очевидных упрощений получаем окончательный ответ:

$$S = \frac{\pi h^2}{\sin^2\frac{\alpha}{4}} \text{ кв. ед.}$$

Задача 6. Определить угол между образующей и плоскостью основания конуса, объем которого в m раз более объема вписанного в конус шара. Вычислить этот угол при $m = 2$.

Решение. Пусть шар O вписан в конус SAB (рис. 377) По условию задачи $V_{\text{кон}} = mV_{\text{шара}}$. Найти угол SAD.

Обозначим $\angle SAD = \alpha$, радиусы $AD = R$, $OD = r$ и высоту $SD = H$.

Тогда по условию задачи

$$\frac{4}{3} m\pi r^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

или

$$4mr^3 = R^2 H.$$

Из треугольников ADS и ADO $\left(\angle OAD = \frac{\alpha}{2}\right)$ находим

$$r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad H = R \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим:

$$4mR^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} = R^3 \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$4m \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Так как $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$, то, сократив полученное уравнение на $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и избавившись в нем от знаменателя, приходим к биквадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$:

$$2m \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} - 2m \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}.$$

Отрицательные корни уравнения не пригодны к решению данной задачи, поэтому окончательно будем иметь:

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}.$$

Найденное решение имеет смысл, если $\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}\geqslant 0$, т. е., если $m\geqslant 2$.

Ответ: $\alpha=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}}}$ $(m\geqslant 2)$.

При $m=2$, ограничиваясь четырьмя значащими цифрами, имеем $\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=2\operatorname{arctg}0{,}7071=2\cdot 0{,}6155=1{,}231$ радианов$=70°{,}53=$ $=70°32'$.

Задача 7. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоским углом α при вершине. Определить высоту пирамиды.

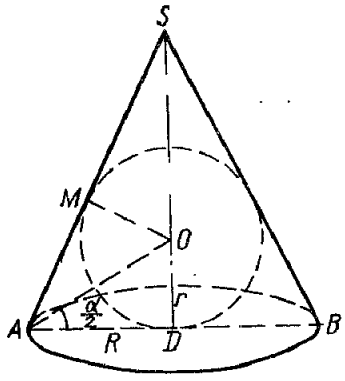


Рис. 377.

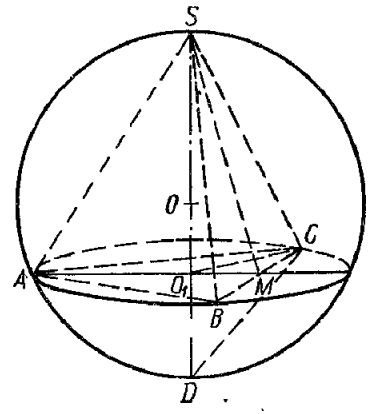


Рис. 378.

Решение. Пусть в шар радиуса $OS=R$ вписана правильная треугольная пирамида (рис. 378). Плоские углы правильной пирамиды при ее вершине $ASB=BSC=ASC=\alpha$. Требуется найти высоту пирамиды. Высота правильной пирамиды, вписанной в шар, совпадает с диаметром шара, проведенным из вершины пирамиды. Обозначим высоту пирамиды $SO_1=H$, а сторону ее основания $AB=$ $=BC=CA=a$.

Плоскость основания пирамиды пересечет поверхность шара O по окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$; O_1C — радиус этой окружности.

По известной из планиметрии зависимости находим

$$O_1C=\frac{a}{\sqrt{3}}. \qquad (165)$$

Проведем высоту SM боковой грани SBC и из $\triangle SMC$ найдем, что

$$SC = \frac{BC}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \qquad (166)$$

Соединив точку C с концом D диаметра SD, получим прямоугольный треугольник SCD ($\angle C = 90°$).
Из этого треугольника имеем:

$$CO_1^2 = SO_1 \cdot O_1D$$

и соответственно

$$SC^2 = SD \cdot SO_1$$

или

$$\frac{CO_1^2}{SC^2} = \frac{O_1D}{SD}.$$

Подставляя значения (165) и (166) и учитывая, что $O_1D = 2R - H$, $SD = 2R$, из последнего равенства получим

$$\frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3a^2} = \frac{2R - H}{2R}$$

или

$$\frac{H}{2R} = 1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

В таком случае

$$H = 2R\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{8R}{3}\left(\frac{3}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{8}{3}R\left(\sin^2 60° - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{3}R\sin\left(60° + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $H = \frac{8}{3}R\sin\left(60° + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Задача 8. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α; высота h пирамиды служит диаметром шара. Найти длину кривой пересечения их поверхностей и вычислить ее при $\alpha = 0{,}46$ радианов; $h = 10{,}7$ *см*.

Р е ш е н и е. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и шар O_1, диаметром которого служит высота пирамиды $SO = h$; плоский угол при вершине пирамиды $\angle BSC = \alpha$ (рис. 379). Найти длину линии, по которой поверхность шара пересекается с поверхностью пирамиды.

Искомая линия состоит из четырех равных дуг окружностей, по которым пересекаются плоскости боковых граней пирамиды с поверхностью шара. Поэтому для решения задачи достаточно найти длину одной из этих дуг.

Найдем длину дуги B_1C_1, по которой грань пирамиды BSC пересекается с поверхностью шара.

Плоскость грани BSC пересекается с поверхностью шара по окружности, центр которой O_2 найдем, опустив из центра шара перпендикуляр O_1O_2 на плоскость этой грани.

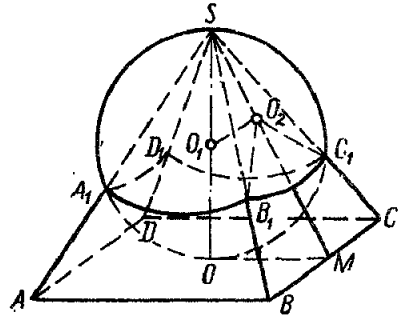


Рис. 379

Угол $B_1SC_1 = \alpha$ является вписанным в окружность O_2 и опирается на дугу B_1C_1, поэтому длина искомой дуги B_1C_1 будет определяться формулой

$$\smile B_1C_1 = 2\alpha r,$$

где α — данный угол в радианах, а $r = O_2S$ — радиус окружности O_2.

Для определения радиуса r рассмотрим подобные прямоугольные треугольники SO_1O_2 и SOM. Из подобия этих треугольников

$$\frac{O_2S}{SO_1} = \frac{SO}{SM}$$

или, учтя, что $SO = h$ и $SO_1 = \frac{1}{2}h$,

$$r = SO_2 = \frac{SO_1 \cdot SO}{SM} = \frac{h^2}{2SM}.$$

Апофему пирамиды SM определим следующим образом. Обозначим сторону основания пирамиды $BC = 2x$, тогда $OM = x$. Из $\triangle BSM$ имеем

$$SM = x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Далее из прямоугольного треугольника SOM по теореме Пифагора

$$SO^2 + OM^2 = SM^2$$

или

$$h^2 + x^2 = x^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$x = \sqrt{\frac{h^2}{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}} = \frac{h \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}$$

и, следовательно,

$$SM = \frac{h \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos \alpha}}.$$

Тогда

$$r = \frac{h^2}{2SM} = \frac{h \sqrt{\cos \alpha}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Подставляя найденное значение r в формулу для длины дуги B_1C_1, имеем:

$$\smile B_1C_1 = 2\alpha r = \frac{\alpha h \sqrt{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Длина искомой линии пересечения поверхности пирамиды с поверхностью шара равна учетверенной длине дуги B_1C_1, так что окончательно получаем:

$$l = \frac{4\alpha h \sqrt{\cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

где α есть угол при вершине пирамиды, измеренный в радианах.

При $h = 10{,}7$ *см* и $\alpha = 0{,}46$ радиана, ограничиваясь вычислениями с четырьмя значащими цифрами, имеем (см. табл. II приложения):

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0{,}9737; \quad \cos \alpha = 0{,}8961; \quad \sqrt{\cos \alpha} = 0{,}9466; \quad l = 19{,}14 \text{ см}.$$

IV. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 96. Вводные замечания

Как уже отмечалось ранее (I раздел, §1), курс геометрии средней школы до настоящего времени в основном является сокращенным и упрощенным курсом геометрии Эвклида. Идеи и методы эвклидовой геометрии, разработанной свыше двух тысяч лет тому назад, носят метафизический характер. Давно назрела необходимость перестройки преподавания курса геометрии в средней школе.

Современная математика достигла очень высокого уровня развития и продолжает бурно развиваться только благодаря тому, что ее идеи и методы основываются на диалектическом образе мышления. В частности, диалектический подход к изучению геометрии проявляется в том, что любая геометрическая фигура (плоская или пространственная) мыслится как некоторое множество точек, а геометрическое преобразование фигур (параллельный перенос, поворот, симметрия, гомотетия, инверсия и др.) представляется как некоторое функциональное преобразование — своеобразная геометрическая функция, ставящая во взаимно однозначное соответствие точки данной фигуры и преобразованной.

Диалектический подход к изучению математики приводит к установлению все более глубоких и плодотворных связей между различными ее ветвями, которые, в свою очередь, способствуют возникновению и развитию новых эффективных методов исследования и решения задач. Одной их важных связей является связь между геометрией и алгеброй, приведшая к созданию нового своеобразного «геометрического исчисления» — «векторной алгебры».

В курсе математики средней школы «Векторная алгебра» должна дать учащимся не только новые методы решения геометрических задач, но и способствовать развитию современного строго научного мышления при изучении математики и ее приложений.

Особое внимание этому разделу должны уделить читатели, незнакомые с элементами векторной алгебры.

§ 97. Скаляриые и векторные величины

Скалярными величинами называются величины, которые вполне могут быть охарактеризованы числами (например, длина, площадь, объем, масса, плотность, энергия, работа, температура и др.). *Векторными* величинами называются величины, для полной характеристики которых требуется указание числа и направления в пространстве (например, скорость, ускорение, сила, напряженность поля и др.).

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок AB, у которого точка A рассматривается как начало, а точка B — как конец. Вектор изображается графически стрелкой и обозначается или двумя большими буквами с чертой (иногда стрелкой) над ними, или одной маленькой буквой с чертой (стрелкой) над ней. В печатном тексте буквы, обозначающие вектор, выделяют часто полужирным шрифтом, а черту (стрелку) сверху не ставят.

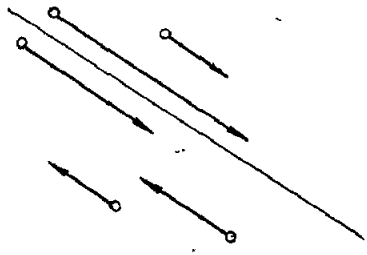


Рис. 380.

Длину вектора обозначают знаком абсолютной величины (модуля). В печатном тексте длину вектора обозначают также соответствующей буквой, напечатанной обыкновенным шрифтом.

Вектор вполне определяется следующими четырьмя элементами:

1. Начальной точкой A.
2. Прямой l, проходящей через точку A так, чтобы на ней лежал данный вектор.
3. Направлением вектора на прямой l, т. е. указанием на то, по какую сторону от точки A на прямой l лежит точка B (конец вектора).
4. Длиной (модулем).

Вектор, у которого начало совпадает с концом, называется *нуль-вектором*. Длина нуль-вектора равна нулю.

Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же прямой (рис. 380).

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Два вектора всегда компланарны.

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

§ 98. Равенство векторов

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *равными*, если выполняются следующие условия:

1. Прямые AB и CD параллельны или совпадают.

2. Направление на прямой AB от начальной точки A к конечной точке B совпадает с направлением на прямой CD от начальной точки C к конечной точке D.

3. Отрезки AB и CD равны между собой.

Равенство векторов обозначается обычным знаком равенства, например,

$$\overline{AB} = \overline{CD}.$$

Однако при этом вектор $\overline{AB}$ не равен вектору $\overline{DC}$, так как у них направления противоположны.

Признак равенства векторов.

Если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ не расположены на одной прямой, то равенство $\overline{AB} = \overline{CD}$ имеет место в том и только в том случае, если четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Следствие. Если A, B, C, D — такие четыре точки, что $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Если на плоскости даны вектор $\overline{AB}$ и точка N, то существует единственный вектор $\overline{NM}$ с началом N, такой, что $\overline{NM} = \overline{AB}$.

Замечание. От понятия равенства геометрических фигур (две геометрические фигуры называются равными, если существует какое-либо движение, с помощью которого эти фигуры можно совместить всеми их точками) понятие равенства векторов существенно отличается, а именно: два вектора равны тогда и только тогда, когда существует параллельный перенос, с помощью которого эти векторы можно совместить.

В связи с этим, вектор нельзя рассматривать как геометрическую фигуру в обычном смысле.

§ 99. Сложение и вычитание векторов

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют такой третий вектор $\bar{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\bar{a}$, а конец — с концом вектора $\bar{b}$, при непременном условии, что конец вектора $\bar{a}$ совмещен с началом вектора $\bar{b}$ (рис. 381). Сложение двух неколлинеарных векторов можно также определить при помощи правила параллелограмма, если векторы-слагаемые привести к общему началу, то вектор-сумма, выходящий из этого начала, совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на исходных векторах-слагаемых: (рис. 382).

Полигоном нескольких векторов называется ломаная, составленная из этих векторов так, что конец одного из них совпадает с началом другого, конец другого — с началом третьего и т. д.

Суммой нескольких векторов называется вектор, идущий от начала к концу полигона, составленного из векторов-слагаемых (рис 383). Сложение нескольких векторов может быть выполнено также последовательно, что понятно из рис. 384.

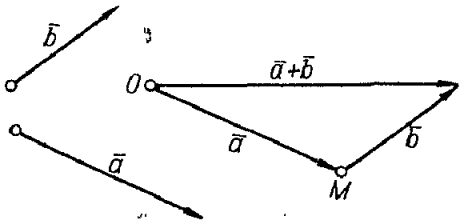


Рис. 381.

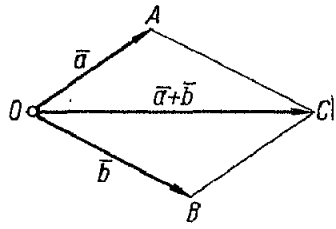


Рис. 382.

Если полигон векторов замыкается, то сумма векторов, его составляющих, равна нуль-вектору. Если сумма нескольких векторов равна нуль-вектору, то полигон, составленный из векторов-слагаемых, замыкается.

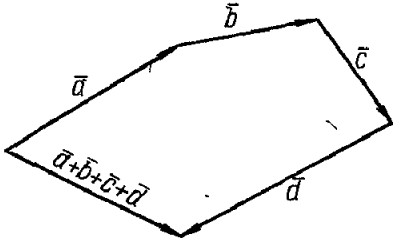


Рис. 383.

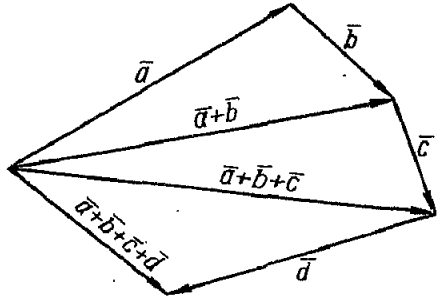


Рис. 384.

Основные свойства сложения векторов.

1. Переместительное свойство. От перестановки слагаемых векторов их вектор-сумма не изменяется.

2. Сочетательное свойство. При сложении нескольких векторов от замены части из них вектором-суммой общая сумма векторов не изменяется (рис. 385).

Разностью двух векторов $\bar{a}-\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который удовлетворяет равенству

$$\bar{c}+\bar{b}=\bar{a}.$$

Для построения разности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ следует привести их к одному началу. *Вектором-разностью* $\bar{c}$ будет вектор, идущий от конца вектора $\bar{b}$ к концу вектора $\bar{a}$ (рис. 386).

Вектором, противоположным вектору $\bar{a} \neq 0$, называется вектор, коллинеарный вектору $\bar{a}$, равный ему по длине и направленный в сторону, противоположную вектору $\bar{a}$. Сумма вектора с противоположным ему вектором есть нуль-вектор. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

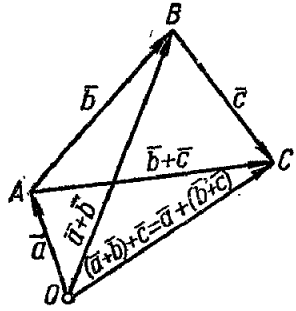


Рис. 385.

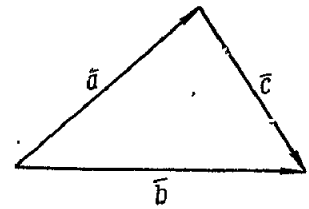


Рис. 386.

Пользуясь понятием противоположного вектора, вычитание векторов заменяется сложением по правилу:

чтобы от вектора $\bar{a}$ вычесть вектор $\bar{b}$, нужно к вектору $\bar{a}$ прибавить вектор, противоположный вектору $\bar{b}$.

Из определения сложения и вычитания векторов и свойств треугольника вытекают важные свойства модулей двух векторов:

1. $|\bar{a}| - |\bar{b}| \leqslant |\bar{a} + \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$,
2. $|\bar{a}| - |b| \leqslant |\bar{a} - \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$.

§ 100. Умножение вектора на число

Произведением вектора $\bar{a}$ на число m называется вектор $\bar{b}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, причем:

1) $|\bar{b}| = |m| \cdot |\bar{a}|$;

2) при $m > 0$ вектор $\bar{b}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\bar{a}$;

3) при $m<0$ вектор $\bar{b}$ направлен в противоположную вектору $\bar{a}$ сторону.

Следствие. При умножении вектора $\bar{a}$ на $m=-1$ получаем противоположный вектор.

Умножение вектора $\bar{a}$ на целое положительное число n соответствует сложению n равных векторов $\bar{a}$.

Деление вектора $\bar{a}$ на число $m\neq 0$ можно заменить умножением того же вектора на число $\frac{1}{m}$.

§ 101. Векторная сумма и правила ее преобразований

Выражение

$$\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}+\ \ldots\ +\varkappa\bar{k},$$

где $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ..., $\bar{k}$ — векторы, α, β, γ, ..., $\varkappa$ — скалярные числа, называется *векторной суммой*.

Поскольку свойства векторной суммы совпадают со свойствами сумм вещественных чисел, то преобразования векторных сумм выполняются по правилам обыкновенной алгебры:

1. В векторной сумме можно раскрывать скобки

$$m(\alpha\bar{a}+\beta\bar{b})=m\alpha\bar{a}+m\beta\bar{b}.$$

2. В векторной сумме можно выносить общий множитель (скалярный или векторный) за скобки

$$m\bar{a}+n\bar{b}+\alpha\bar{a}+\bar{nc}=(m+\alpha)\,\bar{a}+n\,(\bar{b}+\bar{c}).$$

3. В векторной сумме можно производить приведение подобных членов, например,

$$7\bar{a}+2\bar{b}-3\bar{c}-2\bar{a}+7\bar{b}+10\bar{c}=5\bar{a}+9\bar{b}+7\bar{c}.$$

4. Векторную сумму можно приводить к общему скалярному знаменателю, например,

$$\frac{3}{5}\bar{a}-\frac{1}{4}\bar{b}+\frac{3}{7}\bar{c}=\frac{84\bar{a}-35\bar{b}+60\bar{c}}{140}.$$

§ 102. Векторные равенства и их основные свойства

Векторным равенством называется равенство двух векторных сумм.

Основные свойства векторных равенств по форме совпадают с основными свойствами алгебраических равенств:

1. Если к обеим частям векторного равенства прибавить один и тот же вектор, то равенство не нарушается.

Следствие. Члены векторного равенства можно переносить из одной части равенства в другую с противоположным знаком, например, если

$$3\bar{a} + 8\bar{b} = 4\bar{c},$$

то

$$3\bar{a} = 4\bar{c} - 8\bar{b}.$$

2. Все члены векторного равенства можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, например, если

$$\frac{2}{3}\bar{a} + \frac{1}{9}\bar{b} = \frac{5}{6}\bar{c} - \frac{1}{4}\bar{d},$$

то, умножая на 36, получим

$$24\bar{a} + 4\bar{b} = 30\bar{c} - 9\bar{d}.$$

Замечание. Каждый член векторного равенства должен быть вектором.

Сумма вектора и скаляра, например, $\bar{a} + 7$, не имеет смысла точно так же как нельзя сложить 2 *кг* яблок и 3 *м* ткани.

Задача 1. Проверить справедливость равенства

$$(\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} - \bar{b}) = 2\bar{a}$$

для параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. На данных векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построим параллелограмм $AOBC$, где $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$ (рис. 387).

По определению суммы и разности двух векторов имеем

$$\overline{OC} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{BA} = \bar{a} - \bar{b},$$

кроме того, по построению

$$\overline{BA} = \overline{CD} = \overline{ON}; \quad \overline{AD} = \bar{a}; \quad \overline{OB} = \overline{AC} = \overline{NA} = \bar{b}.$$

Следовательно,

$$(\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} - \bar{b}) = \overline{OC} + \overline{BA} = \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \bar{a} + \bar{a} = 2\bar{a}.$$

Из рис. 387 получаем также, что

$$(\bar{a} + \bar{b}) - (\bar{a} - \bar{b}) = \overline{OC} - \overline{ON} = \overline{NC} = \overline{NA} + \overline{AC} = \bar{b} + \bar{b} = 2\bar{b}.$$

Задача 2. Доказать, что векторы, совпадающие с медианами произвольного треугольника, могут служить сторонами другого треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть дан $\triangle ABC$. Проведем его медианы AM, CD, BN.

Для доказательства требуемого следует убедиться, что выполняется равенство

$$\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CD} = \bar{0},$$

где $\bar{0}$ обозначает нуль-вектор.

Определим векторы $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ и $\overline{CD}$ через векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$ (рис. 388)

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC},$$

$$\overline{BN} = \overline{BC} + \overline{CN} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA},$$

$$\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

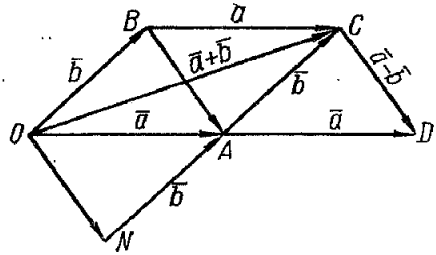


Рис. 387.

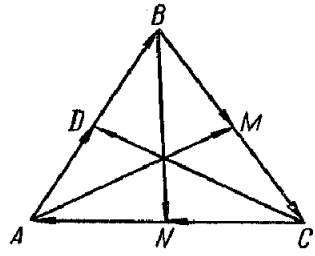


Рис. 388.

Складывая полученные равенства почленно, и учтя, что треугольник есть замкнутый векторный полигон, сумма которого равна нуль-вектору (см. § 99), имеем:

$$\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CD} = \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \frac{3}{2}\bar{0} = \bar{0},$$

что и требовалось доказать.

У п р а ж н е н и я.

1. Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр правильного n-угольника с его вершинами, равна нуль-вектору.

2. На сторонах $\triangle ABC$ построены параллелограммы $ABML$, $BCPN$ и $ACQR$. Доказать, что из отрезков RL, MN и PQ можно построить треугольник. Выполнить рисунок.

3. Какой особенностью должны обладать векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы имели место соотношения:

а) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}|$,

б) $|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}|+|\bar{b}|$,

в) $|\bar{a}-\bar{b}|=|\bar{a}|-|\bar{b}|$,

г) $|\bar{a}-\bar{b}|=|\bar{a}|+|\bar{b}|$,

д) $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

§ 103. Разложение вектора на компоненты

Два коллинеарных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ всегда связаны соотношением

$$\bar{a}=m\bar{b},$$

где m — число, абсолютная величина которого определяет отношение длины вектора $\bar{a}$ к длине вектора $\bar{b}$.

Знак m указывает, одинаково (при $m>0$) или противоположно (при $m<0$) направлены векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Любой вектор $\bar{a}$ можно представить в виде

$$\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\bar{a}_0,$$

если ввести так называемый единичный вектор $\bar{a}_0$, т. е. вектор, модуль которого равен единице $|\bar{a}_0|=1$ и который коллинеарен данному вектору $\bar{a}$.

Любой вектор $\bar{p}$ можно представить в виде векторной суммы, составленной из двух данных компланарных ему векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, умноженных на некоторые числа m и n. Это представление имеет вид (рис. 389):

$$\bar{p}=m\bar{a}+n\bar{b}.$$

В результате мы разложили вектор $\bar{p}$ по компонентам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. В случае, когда один из векторов $\bar{a}$ или $\bar{b}$ коллинеарен с вектором p, коэффициент при другом векторе следует выбрать равным нулю.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны, то указанное представление вектора $\bar{p}$ можно осуществить лишь единственным образом.

Аналогично, если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ попарно не коллинеарны, то любой вектор $\bar{p}$ можно единственным образом представить с помощью векторной суммы вида

$$\bar{p} = m\bar{a} + n\bar{b} + r\bar{c},$$

т. е. в этом случае вектор $\bar{p}$ разлагается по трем компонентам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (рис. 390).

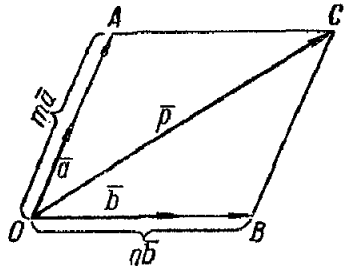


Рис. 389.

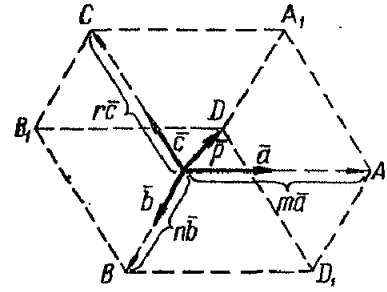


Рис. 390.

§ 104. Понятие о линейной зависимости между векторами

Векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если можно подобрать такие не все равные нулю числа α_1, α_2, ..., α_n, что выполняется равенство

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = 0.$$

Предполагается, что ни один из векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ не является нуль-вектором.

Некоторые свойства линейно зависимых векторов:

1. Если два вектора линейно зависимы, то они коллинеарны (и наоборот).

2. Если три вектора линейно зависимы, то они компланарны (и наоборот).

3. Четыре произвольных вектора всегда линейно зависимы.

§ 105. Проекция вектора на ось

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется длина отрезка A_1B_1 (A_1 и B_1 — проекции точек A и B на ось l), взятая со знаком плюс, если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением единич-

ного вектора $\bar{l}_0$ оси l, и со знаком минус, если направление $\overline{A_1B_1}$ противоположно направлению $\bar{l}_0$ (рис. 391 и рис. 392).

Проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначают символом $\text{Пр}_l\overline{AB}$.

Если $\overline{AB} \neq 0$, то $\text{Пр}_l\overline{AB} = 0$ в том и только в том случае, если $AB \perp l$.

Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Если A_1 и B_1 — проекции точек A и B на ось l, то

$$\overline{A_1B_1} = \bar{l}_0 \cdot \text{Пр}_l\overline{AB}.$$

Отметим также основные свойства проекций векторов на ось.

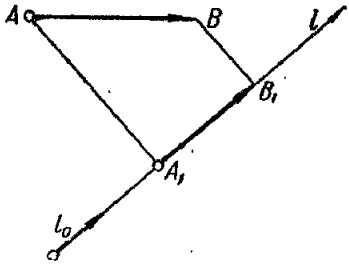


Рис. 391.

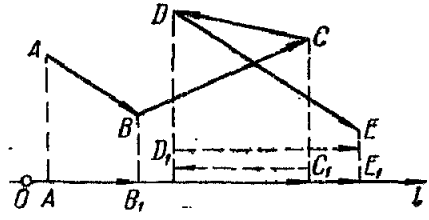


Рис. 392.

1. Проекция вектора $m \cdot \bar{a}$ на произвольную ось l равна проекции на эту же ось вектора $\bar{a}$, умноженной на число m:

$$\text{Пр}_l(m \cdot \bar{a}) = m\,\text{Пр}_l\bar{a}.$$

2. Проекция вектора на ось l равна произведению длины этого вектора на косинус угла между ним и положительным направлением оси l:

$$\text{Пр}_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos(\widehat{\bar{a}l}).$$

3. Проекция алгебраической суммы векторов на ось l равна соответствующей алгебраической сумме проекций на ту же ось векторов-слагаемых (рис. 392):

$$\text{Пр}_l(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{DE}) =$$
$$= \text{Пр}_l\overline{AB} + \text{Пр}_l\overline{BC} + \text{Пр}_l\overline{CD} + \text{Пр}_l\overline{DE} =$$
$$= A_1B_1 + B_1C_1 - C_1D_1 + D_1E_1 = A_1E_1.$$

§ 106. Упорядоченные связки трех векторов

Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, приведенных к общему началу, образуют связку трех векторов (употребляется также название «триэдр»).

Связка трех векторов называется *упорядоченной*, если обусловлен порядок, в котором выполняется отсчет векторов, образующих связку.

Если поворот для совмещения вектора $\bar{a}$ с вектором $\bar{b}$ и т. д. выполняется так, как это указано на рис. 393, то связка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется *левой*, а если так, как на рис. 394, то — *правой*.

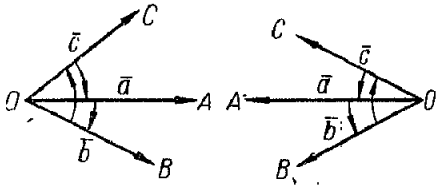


Рис. 393.

Рис. 394.

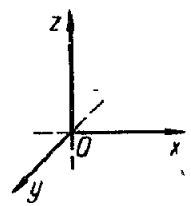


Рис. 395.

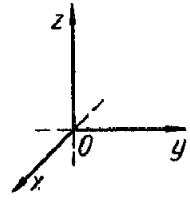


Рис. 396.

С понятием упорядоченной связки трех векторов тесно связано понятие системы координат в трехмерном пространстве. Например, прямоугольная декартова система координат в трехмерном пространстве представляет собой совокупность трех взаимно перпендикулярных осей (Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат), расположенных по способу левой (рис. 395) либо правой (рис. 396) связки.

Ниже во всех случаях мы будем пользоваться левой системой расположения координатных осей.

§ 107. Координаты вектора на плоскости и в пространстве. Координаты суммы векторов

Пусть XOY — прямоугольная декартова система координат на плоскости и пусть задан произвольный вектор $\bar{a}$ на той же плоскости, начало которого совпадает с началом координат (рис. 397).

Координатами вектора $\bar{a}$ называются проекции x и y вектора $\bar{a}$ на оси координат OX и OY:

$$x = \text{Пр}_{OX}\bar{a}, \quad y = \text{Пр}_{OY}\bar{a}.$$

Число x называют также *абсциссой вектора* $\bar{a}$, а число y — *ординатой*.

Вектор с координатами x, y принято обозначать символом $\{x; y\}$, например, запись $\bar{a} = \{-7; +4\}$ означает, что координатами вектора $\bar{a}$ являются числа -7 (абсцисса) и $+4$ (ордината).

Аналогично определяются координаты вектора $\bar{a}$ в трехмерном пространстве:

$$x = \text{Пр}_{OX}\bar{a}; \quad y = \text{Пр}_{OY}\bar{a}; \quad z = \text{Пр}_{OZ}\bar{a}.$$

Вектор с координатами x, y, z обозначается символом $\{x; y; z\}$, например, $\bar{a} = \{2; -3; 5\}$ и т. д.

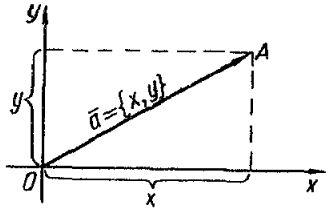


Рис. 397.

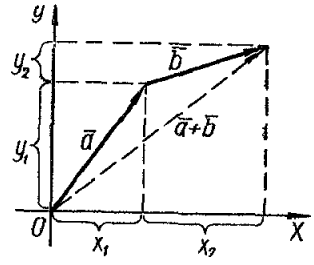


Рис. 398.

Вектор $\overline{OA}$, начало которого совпадает с точкой O (началом системы координат), называется радиусом-вектором точки A.

Проекции x и y (а в случае системы координат в пространстве x, y и z) радиуса-вектора $\overline{OA}$ точки A на оси координат являются координатами точки A в той же системе координат.

По известным координатам двух векторов легко определить координаты результирующего вектора. Так же легко определить координаты произведения заданного вектора на число.

Если в системе координат XOY векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют соответственно координаты $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$, то вектор-сумма в той же системе XOY имеет координаты $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$ (рис. 398).

Если вектор $\bar{a}$ имеет координаты $\{x; y\}$, то вектор $m \cdot \bar{a}$ (m — произвольное вещественное число) в той же системе координат имеет координаты $\{mx; my\}$ (рис. 399).

Аналогично в трехмерном пространстве для суммы $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ векторов $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ получаем

$$\bar{c} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\},$$

а для произведения вектора $\bar{a} = \{x;\ y;\ z\}$ на число m получаем

$$m \cdot \bar{a} = \{mx;\ my;\ mz\}.$$

В заключение параграфа рассмотрим еще более общий случай, когда начальная точка вектора не совпадает с началом системы координат.

Пусть в прямоугольной системе координат даны две точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Тогда координаты вектора $\overline{AB} = \{x;\ y\}$ выражаются через координаты $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ его начала A и конца B следующим образом (рис. 400):

$$x = x_2 - x_1; \quad y = y_2 - y_1$$

и можно записать

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}.$$

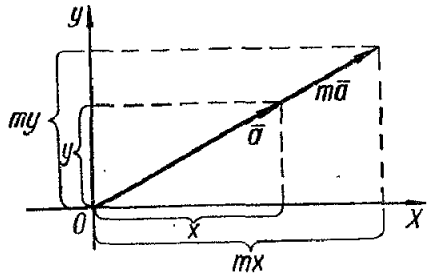


Рис. 399.

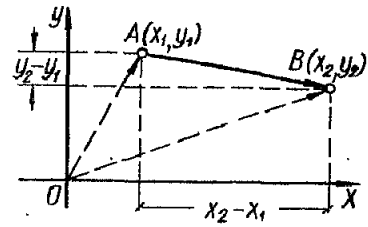


Рис. 400.

Аналогично в трехмерном пространстве вектор $\overline{AB}$ с началом $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ записывается в виде

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

Если известен угол между положительным направлением оси OX (в системе координат XOY) и вектором $\bar{a}$, то координаты вектора $\bar{a}$ могут быть вычислены по формулам:

$$x_2 - x_1 = |\bar{a}| \cos\alpha,$$
$$y_2 - y_1 = |\bar{a}| \sin\alpha.$$

Если известны углы α, β, γ между вектором $\bar{b}$ и положительными направлениями осей координат в трехмерной системе координат XYZ, то координаты вектора $\bar{b}$ вычисляются по формулам:

$$x_2 - x_1 = |\bar{b}| \cos\alpha,$$
$$y_2 - y_1 = |\bar{b}| \cos\beta,$$
$$z_2 - z_1 = |\bar{b}| \cos\gamma.$$

Упражнения.

1. Определить координаты вектора $\overline{AB}$ и построить его на плоскости, если:

а) $A(1; 5)$, $B(6; 8)$.

б) $A(5; 7)$, $B(-7; -3)$.

2. Дано $\overline{AB} = \{-4; 9\}$. Найти координаты конца вектора $\overline{AB}$, если координаты его начала:

а) $A(4; -3)$, б) $A(-7; 2)$.

3. Дано $\overline{AB} = \{-3; 5\}$.

Найти координаты начала вектора $\overline{AB}$, если координаты его конца:

а) $B(5; -3)$, б) $B(-2; 0)$.

4. Начало вектора $\overline{AB}$, длина которого $|\overline{AB}| = 12\sqrt{3}$, имеет координаты $A(3; -5)$. Угол между вектором $\overline{AB}$ и положительным направлением оси OX равен $150°$. Найти координаты конца B вектора $\overline{AB}$.

§ 108. Разложение вектора по базисной системе векторов

Базисной системой векторов (или системой ортов) называется система единичных векторов координатных осей. Орт оси OX обозначается через $\bar{i}$, орт оси OY — через $\bar{j}$, орт оси OZ — через $\bar{k}$.

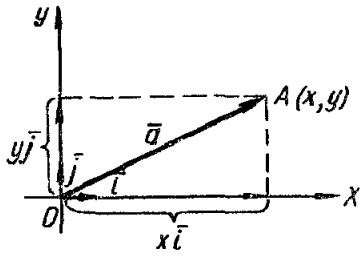


Рис. 401.

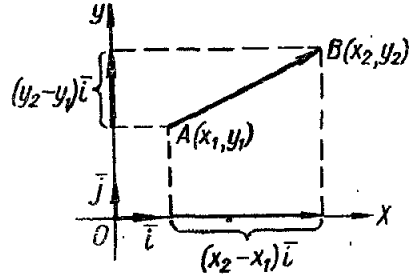


Рис. 402.

Для любого, лежащего в плоскости XOY, вектора $\bar{a} = \{x; y\}$ справедливо равенство (рис. 401)

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j}.$$

Для произвольного вектора $\overline{AB}$ (рис. 402), начало и конец которого находятся соответственно в точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$,

формула для разложения по ортам имеет вид

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\bar{i} + (y_2 - y_1)\,\bar{j}.$$

Для любых векторов, расположенных в пространстве (рис. 403 и рис. 404),

$$\bar{a} = \{x;\ y;\ z\},\quad \bar{b} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$$

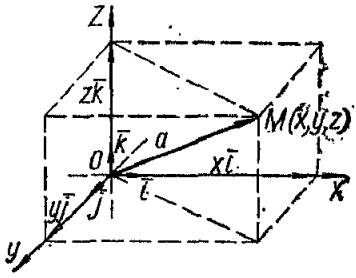


Рис. 403.

разложения по ортам имеют вид:

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k};\quad \bar{b} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\,\bar{j} + (z_2 - z_1)\,\bar{k}.$$

Замечание. Между векторами и их координатами существует взаимно однозначное соответствие; следовательно, разложение векторов по ортам может быть выполнено лишь единственным образом.

Задача 1. $ABCDE$ — произвольный пятиугольник, l — произвольная ось. Определить сумму проекций сторон AB, BC, CD, DE, EA на ось l.

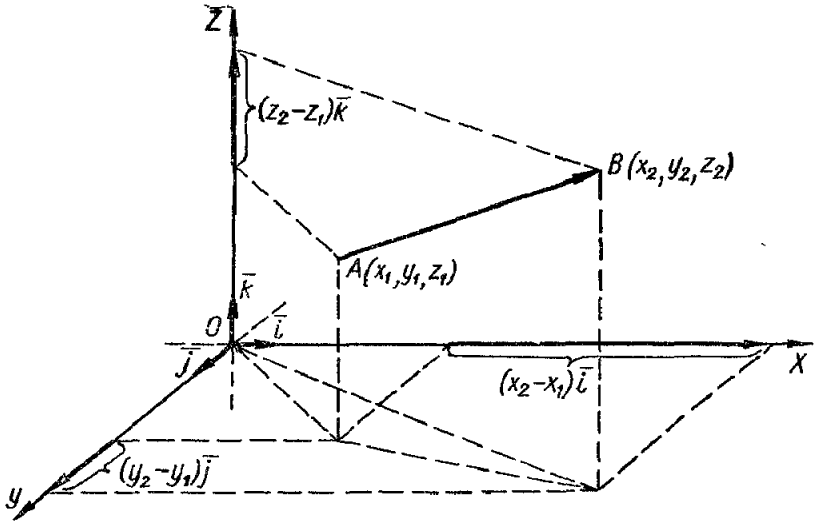


Рис. 404.

Решение. Пусть пятиугольник $ABCDE$ изображен на рис. 405. Тогда имеем:

$$\text{Пр}_l\,\overline{AB} + \text{Пр}_l\,\overline{BC} + \text{Пр}_l\,\overline{CD} + \text{Пр}_l\,\overline{DE} + \text{Пр}_l\,\overline{EA} =$$

$$= A_1B_1 + B_1C_1 - C_1D_1 + D_1E_1 - E_1A_1 = A_1D_1 + D_1B_1 + B_1E_1 + \\ + E_1C_1 - D_1B_1 - B_1E_1 - E_1C_1 + D_1B_1 + B_1E_1 - B_1E_1 - D_1B_1 - \\ - A_1D_1 = (A_1D_1 - A_1D_1) + 2(D_1B_1 - D_1B_1) + 2(B_1E_1 - B_1E_1) + \\ + (E_1C_1 - E_1C_1) = 0.$$

Отметим, что и для произвольной замкнутой ломаной, состоящей из n звеньев, сумма проекций ее звеньев на произвольную ось l равна нулю (при условии, что учитывается и направление каждого звена).

Задача 2. Дано: $\Pr_l \bar{a} = -3$, $\Pr_l \bar{b} = 5$. Вычислить проекцию вектора $\bar{c} = \bar{a} + 2\bar{b}$ на ось l.

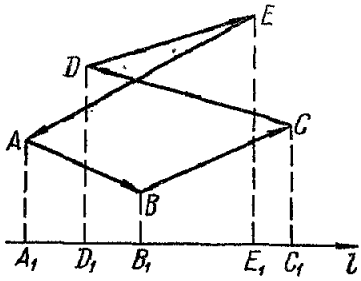


Рис. 405.

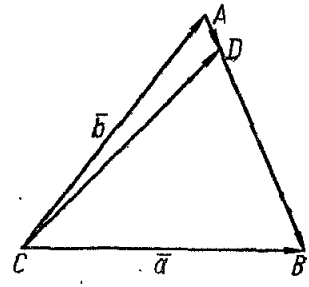


Рис. 406.

Решение. Согласно условию задачи, имеем

$$\Pr_l \bar{c} = \Pr_l (\bar{a} + 2\bar{b}) = \Pr_l \bar{a} + 2\Pr_l \bar{b} = \\ = -3 + 2 \cdot 5 = 7,$$

следовательно,

$$\Pr_l \bar{c} = 7.$$

Задача 3. Вектор $\bar{a}$ образует с осью OX угол $\alpha = 135°$, а длина его равна 4. Определить координаты вектора $\bar{a}$.

Решение. По формулам

$$x_2 - x_1 = |\bar{a}| \cos \alpha,$$
$$y_2 - y_1 = |\bar{a}| \sin \alpha,$$

получаем

$$x_2 - x_1 = 4 \cos 135° = -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2},$$

$$y_2 - y_1 = 4 \sin 135° = +4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = +2\sqrt{2}.$$

Задача 4. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении $AD : DB = 2 : 7$. Разложить вектор CD по векторам $\overline{CA} = \bar{b}$, $\overline{CB} = \bar{a}$.

Решение. По определению суммы и разности двух векторов (рис. 406), имеем:

$$\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD};\ \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA} = \bar{a} - \bar{b}.$$

Следовательно,

$$\overline{AD} = \frac{2}{9}(\bar{a} - \bar{b});$$

$$\overline{CD} = \bar{b} + \frac{2}{9}(\bar{a} - \bar{b}) = \frac{2}{9}\bar{a} + \frac{7}{9}\bar{b}.$$

Таким образом,

$$\overline{CD} = \frac{2}{9}\bar{a} + \frac{7}{9}\bar{b}.$$

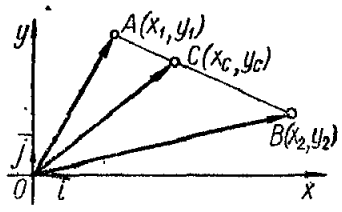


Рис. 407.

Задача 5. Разделить данный отрезок AB в данном отношении $m : n$.

Решение. Соединим начало координат O с точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, являющимися началом и концом данного отрезка AB (рис. 407). По координатам векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ требуется найти координаты вектора $\overline{OC}$, выполняющего требуемое деление отрезка AB.

По условию задачи

$$AC = \frac{m}{n} CB,$$

следовательно,

$$AB = AC + BC = \frac{m}{n} CB + CB = \frac{m+n}{n} BC,$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n} : \frac{m+n}{n} = \frac{m}{m+n}.$$

Таким образом,

$$AC = \frac{m}{m+n} AB \text{ или } \overline{AC} = \frac{m}{m+n} \overline{AB}$$

(последнее равенство справедливо, так как направления от точки A к точке C и от точки A к точке B совпадают).

Учитывая, что $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA}$ и $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, получаем

$$\overline{OC} - \overline{OA} = \frac{m}{m+n}(\overline{OB} - \overline{OA}),$$

следовательно,

$$\overline{OC} = \frac{m}{m+n}\overline{OB} + \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\overline{OA} = \frac{m}{m+n}\overline{OB} + \frac{n}{m+n}\overline{OA}.$$

Обозначим искомые координаты вектора $\overline{OC}$ через x_C и y_C и запишем векторы $\overline{OC}$, $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ в виде разложений по ортам $\bar{i}$ и $\bar{j}$:

$$\overline{OC} = x_C\bar{i} + y_C\bar{j},$$
$$\overline{OA} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j},$$
$$\overline{OB} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}.$$

Таким образом, получаем

$$x_C\bar{i} + y_C\bar{j} = \frac{m}{m+n}(x_2\bar{i} + y_2\bar{j}) + \frac{n}{m+n}(x_1\bar{i} + y_1\bar{j}) =$$
$$= \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}\bar{i} + \frac{ny_1 + my_2}{n+m}\bar{j}.$$

Учитывая единственность разложения вектора по ортам, приравниваем соответствующие координаты при одноименных ортах в левой и правой частях последнего равенства:

$$x_C = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}; \quad y_C = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}.$$

Полученные координаты искомого вектора $\overline{OC}$ являются также координатами точки C, делящей данный отрезок AB в данном отношении $m:n$. Если обозначить данное отношение через λ, то координаты делящей точки C могут быть записаны в виде следующих формул:

$$x_C = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y_C = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

§ 109. Понятие об умножении векторов

В связи с тем, что вектор характеризуется двумя факторами — длиной и направлением в пространстве, понятие обыкновенного умножения чисел (как частный случай сложения равных чисел) не может быть перенесено на перемножение векторов.

Сложение равных векторов соответствует умножению вектора на число (скаляр).

Умножение вектора на вектор бывает двух типов: скалярное и векторное. В результате скалярного умножения двух векторов

получаем число (скаляр). В результате векторного умножения двух векторов получаем вектор.

Три вектора могут быть перемножены несколькими способами:

1. Если два данных вектора перемножим скалярно, а затем результат умножим на третий вектор, то получим вектор (умножение вектора на число).

Такое произведение называется *скалярно-векторным* произведением трех векторов.

2. Если два данных вектора перемножим векторно, а затем результат (вектор-произведение) умножим на третий вектор скалярно, то получим число.

Такое произведение векторов называется *смешанным* произведением трех векторов.

3. Если два данных вектора перемножим векторно, а затем результат (вектор-произведение) умножим на третий из данных векторов векторно, то в результате получим вектор.

Такое произведение трех векторов называется *векторно-векторным*.

§ 110. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется произведение длины вектора $\bar{a}$ и проекции на него вектора $\bar{b}$. Такое произведение обозначается символом $\bar{a}\,\bar{b}$, а также (главным образом в более ранней литературе) символом $(\bar{a}\,\bar{b})$.

Следовательно,

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\,\mathrm{Пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}\,.$$

Скалярное произведение двух векторов, из которых один есть нуль-вектор, принимается равным нулю.

Если α — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, то $\mathrm{Пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = |\bar{b}|\cos\alpha$, следовательно,

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|\cos\alpha,$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин, умноженному на косинус угла между ними.

Если α — острый угол, то скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ положительно, если α — прямой угол, то скалярное произведение равно нулю, если α — тупой угол, то скалярное произведение отрицательно.

Условие перпендикулярности двух векторов: *Два вектора* $\bar{a} \neq 0$ и $\bar{b} \neq 0$ *в том и только в том случае взаимно перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.*

При умножении двух равных векторов $\bar{a} = \bar{b}$ их скалярное произведение принимает вид

$$\bar{a}\,\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|\,|\bar{a}|\cos 0 = |\bar{a}|^2.$$

Следовательно, скалярный квадрат вектора $\bar{a}$ равен квадрату его длины $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

С учетом определения базисных векторов (ортов) в прямоугольной системе координат $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ их скалярные произведения и скалярные квадраты имеют вид

$$\bar{i}\,\bar{j} = 0;\ \bar{i}\,\bar{k} = 0;\ \bar{j}\,\bar{k} = 0,$$
$$\bar{i}^2 = 1;\ \bar{j}^2 = 1;\ \bar{k}^2 = 1.$$

Задача 1. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если их длины соответственно равны 3 и 7, а угол между их направлениями составляет 30°.

Решение. Поскольку $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 7$, $\alpha = 30°$, то

$$\bar{a}\,\bar{b} = 3 \cdot 7 \cdot \cos 30° = 21\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 10{,}5\sqrt{3}.$$

Задача 2. Определить длину вектора $\bar{b}$, если длина вектора $\bar{a}$ равна 4, угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляет 60°, а их скалярное произведение равно 17.

Решение. Из формулы

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\alpha$$

получаем

$$|\bar{b}| = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{|\bar{a}|\cos\alpha},$$

следовательно,

$$|\bar{b}| = \frac{17}{4\cos 60°} = \frac{17}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 8{,}5.$$

Отметим свойства скалярного произведения двух векторов, которые непосредственно вытекают из определения скалярного произведения.

Скалярное произведение двух произвольных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обладает:

1. Свойством переместительности (коммутативности)

$$\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}.$$

2. Свойством сочетательности (ассоциативности) по отношению к умножению вектора на число

$$(m\bar{a})\,\bar{b} = m(\bar{a}\,\bar{b}) = \bar{a}\,(m\bar{b}).$$

3. Свойством распределительности (дистрибутивности) относительно сложения векторов

$$\bar{a}\,(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\,\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c};$$
$$(\bar{a} + \bar{b})\,\bar{c} = \bar{a}\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c}.$$

Упражнения.

1. Угол α между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 60°. Найти проекцию вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$, если длина вектора $\bar{b}$ равна 9,6.

2. Проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ равна -8. Найти угол между данными векторами, если длина вектора $\bar{a}$ равна $8\sqrt{2}$.

3. Вычислить длину вектора $\bar{b}$, если его проекция на направление вектора $\bar{a}$ равна 10, а угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 45°.

4. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = \sqrt{3}$, $|\bar{b}| = 1\frac{3}{4}$, а угол между ними равен 135°.

§ 111. Некоторые применения векторной алгебры в геометрии

1. Доказать, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle ACB = 90°$, $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$.

На сторонах треугольника выберем направления (т. е. векторизуем* их), обозначив (рис. 408):

$$\overline{AB} = \bar{c};\ \overline{AC} = \bar{b};\ \overline{CB} = \bar{a}.$$

По определению суммы двух векторов имеем:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}.$$

Возводя обе части полученного равенства в скалярный квадрат,

* Под словом «векторизуем» здесь и далее следует понимать: «Будем считать векторами линейные элементы с выбранным по условию задачи направлением соответствующей геометрической фигуры».

получим

$$\bar{c}^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\,\bar{b} + \bar{b}^2,$$

откуда

$$c^2 = a^2 + 2ab\cos 90^\circ + b^2,$$

т. е.

$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ так как } \cos 90^\circ = 0.$$

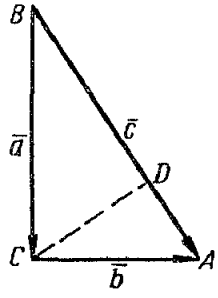


Рис. 408.

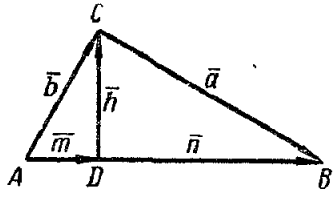


Рис. 409.

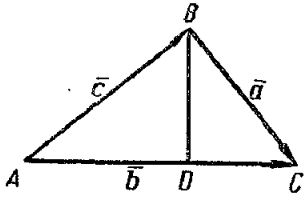


Рис. 410.

2. Доказать, что катет прямоугольного треугольника есть средняя пропорциональная между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.

Доказательство. Из предыдущей задачи имеем: $\bar{b} = \bar{c} - \bar{a}$, откуда $b^2 = c^2 + a^2 - 2\bar{c}\,\bar{a}$. Учитывая, что $\bar{c}\,\bar{a} = |\bar{c}|\,\mathrm{Пр}_{\bar{c}}\bar{a} = c \cdot DB$ и что $a^2 = c^2 - b^2$, найдем: $2b^2 = 2c(c - DB)$. Значит, $b^2 = c \cdot AD$ (см. рис. 408).

3. Доказать, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками, на которые основание этого перпендикуляра делит гипотенузу.

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) и $CD \perp AB$. Векторизуем этот треугольник (рис. 409):

$$\overline{AC} = \bar{b};\ \overline{CB} = \bar{a};\ \overline{DC} = \bar{h};\ \overline{AD} = \bar{m};\ \overline{DB} = \bar{n}.$$

Из треугольников ADC и CDB имеем:

$$\bar{h} = \bar{b} - \bar{m};\quad \bar{h} = \bar{n} - \bar{a}.$$

Перемножив скалярно эти равенства, получаем

$$\bar{h}\,\bar{h} = (\bar{b} - \bar{m})(\bar{n} - \bar{a}) = \bar{b}\,\bar{n} - \bar{m}\,\bar{n} - \bar{b}\,\bar{a} + \bar{m}\,\bar{a}$$

или

$$h^2 = n\,\mathrm{Пр}_{\bar{n}}\bar{b} - mn\cos 0^\circ + ab\cos 90^\circ + m\mathrm{Пр}_{\bar{m}}\bar{a} = nm - mn + mn,$$

т. е.

$$h^2 = mn.$$

4. Доказать, что во всяком треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на отрезок ее от вершины острого угла до высоты.

Доказательство. В треугольнике ABC угол A острый. Векторизуем треугольник ABC, как показано на рис. 410. Тогда $\bar{a} = \bar{b} - \bar{c}$, или $a^2 = b^2 + c^2 - 2\bar{b}\,\bar{c} = b^2 + c^2 - 2b \cdot AD$.

Аналогично доказывается теорема о квадрате стороны, лежащей против тупого угла треугольника.

5. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Доказать.

Доказательство. Векторизуем параллелограмм $ABCD$ так:

$$\overline{AB} = \overline{DC} = \bar{a};\ \overline{AD} = \overline{BC} = \bar{b};\ \overline{AC} = \bar{d}_1;\ \overline{BD} = \bar{d}_2.$$

В таком случае

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},\ \text{или}\ \bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b},$$
$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC},\ \text{или}\ \bar{d}_2 = \bar{b} - \bar{a}.$$

Отсюда, возводя эти равенства в скалярный квадрат, имеем:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + 2\bar{a}\,\bar{b},$$
$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2\,\bar{a}\bar{b}.$$

Складывая эти равенства, получим:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\,(a^2 + b^2).$$

6. Вывести формулу для вычисления медианы треугольника по его сторонам.

Решение. Пусть в треугольнике ABC со сторонами a, b, c нужно вычислить медиану $m_a = AD$. Векторизуем этот треугольник, как показано на рис. 411:

$$\overline{AB} = \bar{c};\ \overline{AC} = \bar{b};\ \overline{BC} = \bar{a};\ \overline{AD} = \bar{m}_a.$$

Так как точка D делит отрезок BC пополам, то*

$$\bar{m}_a = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}, \text{ или } m_a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 - \bar{a}\,\bar{b}. \qquad (1)$$

Скалярное произведение $\bar{a}\,\bar{b}$ найдем, возводя обе части равенства $\bar{c} = \bar{b} - \bar{a}$ в скалярный квадрат и выполнив затем очевидные преобразования:

$$\bar{a}\,\bar{b} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2). \qquad (2)$$

Подставляя равенство (2) в равенство (1), получим:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Аналогично находим, что

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

7. Доказать, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам треугольника.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC стороны соответственно равны a, b, c и отрезок AD есть биссектриса угла A. Векторизуем треугольник, как это показано на рис. 412:

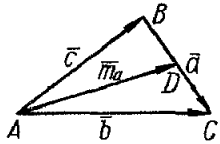


Рис. 411.

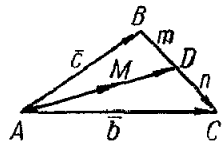


Рис. 412.

$$\overline{AB} = \bar{c}; \quad \overline{AC} = \bar{b}.$$

Пусть точка D делит отрезок BC в отношении $BD : DC = m : n$. Тогда, по условию деления этого отрезка в данном отношении, имеем

$$AD = \frac{n}{m+n}\bar{c} + \frac{m}{m+n}\bar{b}. \qquad (1)$$

Вектор $\overline{AM} = \frac{\bar{c}}{c} + \frac{\bar{b}}{b}$ совпадает с биссектрисой угла A, а это

* Здесь и в дальнейшем мы будем нумеровать формулы в пределах данной задачи.

значит, что можно подобрать такое число k, при котором будет справедливо равенство

$$\overline{AD} = k \cdot \overline{AM} = k\frac{\bar{c}}{c} + k\frac{\bar{b}}{b}. \qquad (2)$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (2) и выполняя преобразования, получим:

$$\left(\frac{n}{m+n} - \frac{k}{c}\right)\bar{c} = \left(\frac{k}{b} - \frac{m}{m+n}\right)\bar{b}.$$

Поскольку векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не параллельны, то последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{n}{m+n} - \frac{k}{c} = \frac{k}{b} - \frac{m}{m+n} = 0.$$

Отсюда находим, что $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, т. е.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}, \qquad (3)$$

что и требовалось доказать.

Кроме того, образовав из пропорции (3) производные пропорции, и, учитывая, что

$$BD + DC = BC = a,$$

можно получить следующие формулы:

$$BD = \frac{ac}{b+c}, \quad DC = \frac{ab}{b+c}. \qquad (4)$$

Другими словами, мы доказали, что отрезки, на которые делит сторону $BC = a$ треугольника ABC биссектриса угла A, равны отношению произведения этой стороны на соответствующую прилежащую сторону к сумме сторон, образующих данный угол.

8. Вывести формулу для вычисления биссектрисы внутреннего угла треугольника по его сторонам.

Р е ш е н и е. Используя свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника и принимая такие обозначения, как на рис. 412, можно записать:

$$\overline{AD} = \frac{b}{b+c}\bar{c} + \frac{c}{b+c}\bar{b} = \frac{b\bar{c} + c\bar{b}}{b+c}.$$

Найдем скалярный квадрат биссектрисы $\overline{AD} = \bar{l}_a$:

$$l_a^2 = \frac{bc\,[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}.$$

Отсюда имеем:

$$l_a = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}.$$

Тогда, обозначив $a+b+c=2p$, получим:

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}. \qquad (1)$$

Замечание. Если записать формулу (1) в виде

$$l_a^2 = bc - \frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c} \qquad (2)$$

и использовать равенства (4) из задачи 7, то получим:

$$l_a^2 = bc - BD\cdot DC, \qquad (3)$$

т. е. квадрат биссектрисы угла при вершине треугольника равен разности между произведением боковых сторон и отрезков, на которые основание делится биссектрисой.

Аналогично выводятся формулы для биссектрис l_b и l_c двух других внутренних углов треугольника ABC.

9. Доказать, что если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противоположных сторон равны между собой.

Доказательство. Векторизуем четырехугольник $ABCD$, (рис. 413):

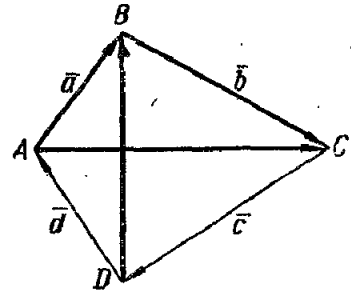


Рис. 413.

$$\overline{AB}=\bar{a};\ \overline{BC}=\bar{b};\ \overline{CD}=\bar{c};\ \overline{DA}=\bar{d}.$$

Тогда, учтя что $\overline{AC}\perp\overline{DB}$, получаем

$$\overline{AC}\cdot\overline{DB}=(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{d})=0,$$

откуда

$$a^2+\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{d}+\bar{b}\bar{d}=0. \qquad (1)$$

Сумму скалярных произведений, входящих в равенство (1), определим, используя равенство

$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}=0 \text{ или } \bar{a}+\bar{b}+\bar{d}=-\bar{c}. \qquad (2)$$

После возведения равенства (2) в скалярный квадрат найдем:

$$\overline{ab}+\overline{ad}+\overline{bd}=\frac{1}{2}(c^2-a^2-b^2-d^2). \qquad (3)$$

Из равенств (1) и (3) имеем:

$$a^2 + \frac{1}{2}(c^2 - a^2 - b^2 - d^2) = 0$$

или

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

что и требовалось доказать.

Упражнения.

1. Доказать, что разность квадратов двух сторон треугольника равна разности квадратов их проекций на третью сторону.

2. Доказать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

3. Если вне треугольника на его сторонах построить произвольные прямоугольники, то из отрезков, которые последовательно соединяют вершины разных, построенных указанным образом прямоугольников, можно построить треугольник. Доказать.

§ 112. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами

Если два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, лежащие в плоскости xOy, заданы своими координатами $\{a_x;\ a_y\}$ и $\{b_x;\ b_y\}$, то их разложения по ортам имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_x\bar{i} + a_y\bar{j}, \\ \bar{b} &= b_x\bar{i} + b_y\bar{j}, \end{aligned} \tag{1}$$

а скалярное произведение согласно § 110 вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y. \tag{2}$$

Для двух векторов, расположенных в трехмерном пространстве $\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$, разложения по ортам имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \\ \bar{b} &= b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}, \end{aligned} \tag{3}$$

а скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$\bar{a}\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{4}$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Скалярный квадрат вектора

$$\bar{a} = \{ a_x;\ a_y \} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$$

вычисляется по формуле

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2, \tag{5}$$

а следовательно, длина вектора $\bar{a}$ может быть вычислена по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{6}$$

Для вычисления скалярного квадрата и длины вектора, заданного в трехмерном пространстве,

$$\bar{a} = \{ a_x;\ a_y;\ a_z \} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

имеют место формулы:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \tag{7}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{8}$$

Отметим, что принятые здесь для координат вектора $\bar{a}$ обозначения a_x, a_y, a_z весьма удобны: они являются разностями между абсциссами (соответственно между ординатами и аппликатами) точек, являющихся концом и началом вектора $\bar{a}$.

§ 113. Вычисление длины отрезка по координатам его концов. Вычисление угла между двумя векторами

Если отрезок AB лежит в плоскости xOy, а его концами являются точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, то длина этого отрезка вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{\overline{AB}^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

Если отрезок AB находится в трехмерном пространстве, а концами его служат точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то длина отрезка AB вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2}$$

Вычисление длины отрезка AB равносильно вычислению расстояния между двумя точками A и B.

Угол α между двумя данными векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}. \tag{3}$$

Для векторов, заданных на плоскости,

$$\bar{a} = \{a_x;\ a_y\} \text{ и } \bar{b} = \{b_x;\ b_y\}$$

эта формула принимает вид

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2)(b_x^2 + b_y^2)}}. \tag{4}$$

Вычисление угла между векторами

$$\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\} \text{ и } \bar{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\},$$

расположенными в трехмерном пространстве, осуществляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}. \tag{5}$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны между собою, то $\alpha = 90^\circ$ и тогда $\cos\alpha = 0$. Поэтому условием перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является равенство нулю числителя в приведенных выше формулах, т. е.

$$a_x b_x + a_y b_y = 0, \tag{6}$$

если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы на плоскости, и

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \tag{7}$$

если эти векторы заданы в пространстве.

Задача 1. Вычислить скалярное произведение векторов

$$\bar{a} = \{-5;\ 7\} \text{ и } \bar{b} = \left\{2\frac{1}{5};\ -10\right\}.$$

Решение. Воспользовавшись формулой (2) § 112, находим искомое скалярное произведение

$$\bar{a}\bar{b} = (-5) \cdot 2\frac{1}{5} + 7 \cdot (-10) = -11 - 70 = -81.$$

Задача 2. Вычислить длину вектора $\bar{a} = \{0{,}6;\ -0{,}8\}$.

Решение. Согласно формуле (6) § 112, имеем:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(0{,}6)^2 + (-0{,}8)^2} = \sqrt{0{,}36 + 0{,}64} = 1.$$

Задача 3. Вычислить угол между вектором $\bar{a} = \{1;\ \sqrt{3}\}$ и осью Ox.

Решение. Задача сводится к вычислению угла между векторами $\bar{a} = \{1;\ \sqrt{3}\}$ и $\bar{i} = \{1;\ 0\}$, так что по формуле (4) данного параграфа получаем

$$\cos\alpha = \frac{1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$\alpha = 60^\circ.$$

Задача 4. Вычислить длину отрезка, концами которого являются точки $A(-7;\ 13)$ и $B(9;\ 3)$.

Решение. Воспользовавшись формулой (1) данного параграфа, находим:

$$AB = \sqrt{(-7-9)^2 + (13-3)^2} = \sqrt{356} \approx 18{,}87.$$

Упражнения.

1. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если

а) $\bar{a} = \{-2;\ 17\}$, $\bar{b} = \{3;\ 11\}$,

б) $\bar{a} = \{+\sqrt{2};\ 5\}$, $\bar{b} = \{-\sqrt{2};\ 3\}$.

2. Вычислить длину вектора $\bar{a} = \{3;\ 4\}$.

3. Вычислить угол между векторами $\bar{a} = \{3;\ 7\}$, $\bar{b} = \{2;\ -5\}$.

4. Вычислить $\angle ABC$, если $A(0;\ 0)$, $B(-3;\ 4)$, $C(-7;\ 1)$.

5. Вычислить длину отрезка AB, если $A(8;\ 9)$, $B(5;\ 5)$.

§ 114. Некоторые применения векторной алгебры в тригонометрии и в физике

Покажем на нескольких типичных примерах насколько упрощается доказательство различных тригонометрических формул и теорем, если для этой цели применять векторную алгебру.

Пример 1. Вывести формулу косинуса разности двух углов.

Решение. Отметим предварительно, что координаты любого единичного вектора $\bar{l}_0$, начало которого совмещено с началом координат в плоскости xOy, будет определяться по следующим формулам (рис. 414):

$$l_x = |\bar{l}_0| \cos\alpha = \cos\alpha,$$
$$l_y = |\bar{l}_0| \sin\alpha = \sin\alpha.$$

Обозначим теперь через $\bar{m}_0$ и $\bar{n}_0$ единичные векторы, образующие с осью Ox соответственно углы α и β (рис. 415).

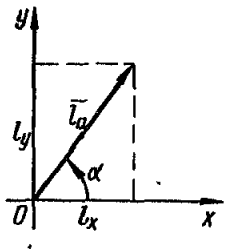


Рис. 414.

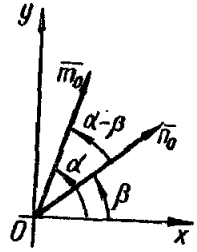


Рис. 415.

Поскольку $|\bar{m}_0| = |\bar{n}_0| = 1$, а угол между векторами $\bar{m}_0$ и $\bar{n}_0$ равен $\alpha - \beta$, то

$$\bar{m}_0\bar{n}_0 = \cos(\alpha - \beta).$$

Записывая далее скалярное произведение векторов

$$\bar{m}_0 = \{\cos\alpha;\ \sin\alpha\} \text{ и } \bar{n}_0 = \{\cos\beta;\ \sin\beta\},$$

и воспользовавшись формулой (2) § 112, получим

$$\bar{m}_0\bar{n}_0 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Таким образом,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Пример 2. Доказать, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов).

Доказательство. Векторизуем $\triangle ABC$, как это показано на рис. 416:

$$\overline{AC} = \bar{b};\quad \overline{CB} = \bar{a};\quad \overline{AB} = \bar{c}.$$

Очевидно, что

$$\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}, \text{ т. е. } \bar{a} = \bar{b} - \bar{c}.$$

Вычисляя по формулам § 110 скалярный квадрат вектора $\bar{a} = \bar{b} - \bar{c}$, получим

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать, что стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов).

Доказательство. Векторизуем $\triangle ABC$, как это показано на рис. 417:

$$\overline{AB} = \bar{c}; \quad \overline{AC} = \bar{b}; \quad \overline{BC} = \bar{a}$$

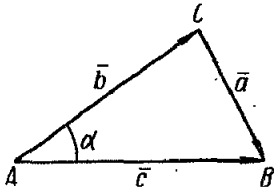


Рис. 416.

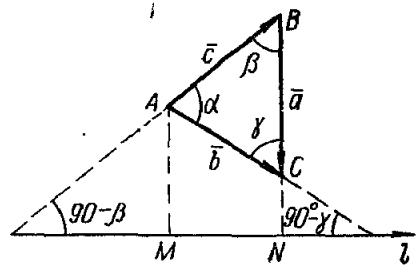


Рис. 417.

и проведем ось $\bar{l}$ перпендикулярно к вектору $\bar{a}$. Тогда

$$\text{Пр}_{\bar{l}}\bar{c} = \text{Пр}_{\bar{l}}\bar{b} = MN,$$

$$\text{Пр}_{\bar{l}}\bar{c} = c\sin\beta; \quad \text{Пр}_{\bar{l}}\bar{b} = b\sin\gamma.$$

Следовательно,

$$b\sin\gamma = c\sin\beta, \text{ или } \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Аналогично, проводя ось $\bar{p} \perp \bar{c}$, получим

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

что и требовалось доказать.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще один пример из физики.

Пусть точка O совершает прямолинейное движение в направлении вектора $\bar{l}$ (по прямой Ol) под воздействием силы $\bar{F}$, которая образует угол α с вектором перемещения $\bar{l}$ (рис. 418).

Формула для вычисления работы в этом случае, как известно из курса физики, имеет вид

$$A = |\bar{F}| \cdot |\bar{l}| \cos\alpha. \qquad (1)$$

Следовательно, работа равна скалярному произведению вектора силы $\bar{F}$ на вектор перемещения $\bar{l}$:

$$A = \bar{F}\bar{l}. \qquad (2)$$

Тогда, согласно формуле (2) § 112, в проекциях на оси координат формула для вычисления работы будет иметь вид

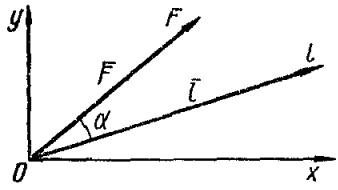


Рис. 418.

$$A = F_x l_x + F_y l_y. \qquad (3)$$

Пример 4. Пусть под воздействием силы $\bar{F} = \{2; 4\}$ точка O перемещается на вектор $\bar{l} = \{3; 4\}$.

Вычислить работу силы $\bar{F}$ и угол α между направлением действия силы $\bar{F}$ и направлением $\bar{l}$ перемещения точки O.

Решение. Воспользовавшись формулой (3) данного параграфа и формулой (4) § 113, находим:

$$A = \bar{F}\bar{l} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 22;$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x l_x + F_y l_y}{|\bar{F}| \cdot |\bar{l}|} = \frac{22}{2\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{11\sqrt{5}}{25}.$$

Число подобных примеров легко продолжить, однако рамки справочника не позволяют нам этого сделать.

§ 115. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который:

1) по абсолютной величине численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$,

2) перпендикулярен плоскости этого параллелограмма.

Связка трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ считается упорядоченной таким же образом, как и связка ортов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ той системы координат, в которой рассматриваются векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (см. § 106).

Для обозначения векторного произведения вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ применяется символ $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ (иногда также символ $[\bar{a}, \bar{b}]$).

Абсолютная величина (модуль) векторного произведения вычисляется по формуле

$$|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \varphi, \qquad (1)$$

где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Вектор $\bar{c}$, равный векторному произведению вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ можно построить так:

1. Через точку O, являющуюся общим началом векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, проведем плоскость Q, перпендикулярную вектору $\bar{a}$ и спроектируем вектор $\bar{b}$ на плоскость Q (рис. 419). В результате получаем вектор $\bar{b}_1 = \overline{OB_1}$, длина которого равна высоте параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

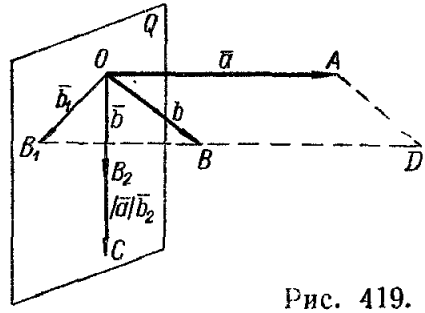


Рис. 419.

2. Повернем вектор $\bar{b}_1$ на 90° в плоскости Q против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\bar{a}$.

Получим вектор $\bar{b}_2 = \overline{OB_2}$, абсолютная величина которого равна абсолютной величине вектора $\bar{b}_1$.

3. Искомое векторное произведение равно вектору $\overline{OC}$, который получим, изменяя длину вектора $\bar{b}_2$ на величину $|\bar{a}|$ (рис. 419):

$$\overline{OC} = |\bar{a}| \cdot \bar{b}_2.$$

Основные свойства векторного произведения.

1. Скалярные множители можно выносить за знак векторного произведения (свойство сочетательности при умножении одного из векторов $\bar{a}$ или $\bar{b}$ на скаляр):

$$m(\bar{a} \times \bar{b}) = (m\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\bar{b}). \qquad (2)$$

Отметим, что о свойстве сочетательности для векторных сомножителей не может быть и речи, так как имеется в виду векторное произведение только двух векторов.

2. Переместительное свойство (коммутативность) для векторного произведения не имеет места.

От перестановки векторов — сомножителей векторное произведение изменяет знак на противоположный:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}. \tag{3}$$

§ 116. Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами

1. Векторное произведение ортов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ некоторой системы координат связаны соотношениями

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}; \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}; \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}, \tag{1}$$

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0; \quad \bar{j} \times \bar{j} = 0; \quad \bar{k} \times \bar{k} = 0. \tag{2}$$

2. Векторное произведение векторов

$$\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\}; \quad \bar{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\}$$

определяется по формуле*

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} a_z a_x \\ b_z b_x \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix} \bar{k}, \tag{3}$$

т. е. координатами вектора $\bar{c}$ являются числа

$$\begin{aligned} \bar{c}_x &= \begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix} = a_y b_z - b_y a_z, \\ \bar{c}_y &= \begin{vmatrix} a_z a_x \\ b_z b_x \end{vmatrix} = a_z b_x - b_z a_x, \\ \bar{c}_z &= \begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - b_x a_y. \end{aligned} \tag{4}$$

3. Длина вектора $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ (абсолютная величина векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$) вычисляется по формуле

$$|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}, \tag{5}$$

---

* В формулах (3), (4) и (6) для сокращения записей мы пользуемся детерминантами (или определителями) второго порядка, которые были введены при решении систем линейных алгебраических уравнений. Подробнее об этом изложено в «Справочнике по элементарной математике» (Арифметика, алгебра), стр. 236.

т. е.

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z a_x \\ b_z b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix}^2}. \quad (6)$$

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = \{2;\ 1\} \text{ и } \bar{b} = \{1;\ 2\}.$$

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах, численно равна абсолютной величине векторного произведения этих векторов.

В данном случае

$$a_x = 2; \quad a_y = 1; \quad a_z = 0,$$
$$b_x = 1; \quad b_y = 2; \quad b_z = 0.$$

Следовательно, согласно формуле (6) этого параграфа:

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2} =$$
$$= \sqrt{(2 \cdot 2 - 1)^2} = \sqrt{3^2} = 3 \text{ кв. ед.}$$

§ 117. Скалярно-векторное произведение трех векторов

Скалярно-векторным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется скалярное произведение вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ на вектор $\bar{c}$. Для обозначения скалярно-векторного произведения векторов (которое также называют смешанным произведением) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ используется символ $(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$, т. е.

$$(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b})\,\bar{c}.$$

Если векторы-сомножители заданы своими координатами

$$\bar{a} = \{a_x;\ a_y;\ a_z\},$$
$$\bar{b} = \{b_x;\ b_y;\ b_z\},$$
$$\bar{c} = \{c_x;\ c_y;\ c_z\},$$

то их скалярно-векторное произведение вычисляется по формуле

$$(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}) = c_x \begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix} + c_y \begin{vmatrix} a_z a_x \\ b_z b_x \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Абсолютная величина скалярно-векторного произведения трех векторов численно равна объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях (рис. 420):

$$|(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})| = |(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c}| = \left|\,|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\varphi\cdot(\bar{l}_0\bar{c})\right| =$$
$$= S_{OABD}\,|\mathrm{Пр}_{\bar{l}}\bar{c}| = hS_{OABD} = V_{OABDCA_1B_1D_1}.$$

Основные свойства скалярно-векторного произведения.

1. От циклической перестановки* векторов-сомножителей скалярно-векторное произведение не изменяется:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c} = (\bar{b}\times\bar{c})\,\bar{a} = (\bar{c}\times\bar{a})\,\bar{b}. \quad (2)$$

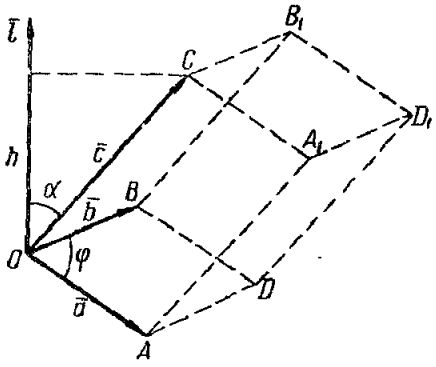


Рис. 420.

2. Имеет место перестановочное свойство в отношении скалярного умножения:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c} = \bar{c}\,(\bar{a}\times\bar{b}). \quad (3)$$

3. От перестановки сомножителей при векторном умножении двух из трех данных сомножителей скалярно-векторное произведение изменяет знак на противоположный:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c} = -(\bar{b}\times\bar{a})\,\bar{c}. \quad (4)$$

4. В скалярно-векторном произведении знаки скалярного и векторного умножения можно менять местами

$$(\bar{a}\times\bar{b})\,\bar{c} = (\bar{b}\times\bar{c})\,\bar{a} = \bar{a}\,(\bar{b}\times\bar{c}). \quad (5)$$

Пример. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\bar{a} = \{2;\ 3;\ 5\},$$
$$\bar{b} = \{1;\ 4;\ 4\},$$
$$\bar{c} = \{3;\ 5;\ 7\}.$$

Решение. В данном случае

$$a_x = 2,\quad a_y = 3,\quad a_z = 5,$$
$$b_x = 1,\quad b_y = 4,\quad b_z = 4,$$
$$c_x = 3,\quad c_y = 5,\quad c_z = 7,$$

* Об определении циклической перестановки см. § 93, Замечание к п. 1.

следовательно, согласно формуле (1),

$$V = \left|(\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})\right| = \left|3\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 4\end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}\right| =$$

$$= |3\,(12-20) + 5\,(5-8) + 7\,(8-3)| = |-24-15+35| =$$

$$= 4 \text{ } куб.\ ед.$$

Отметим в заключение, что условием компланарности трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ является равенство нулю их скалярно-векторного произведения.

ПРИЛОЖЕНИЯ

В приложениях приведены таблицы тригонометрических функций для градусного аргумента (табл. I) и для радианного или абстрактного аргумента (табл. II), обеспечивающие вычисления этих функций с четырьмя значащими цифрами, а также табл. III для перевода градусной меры в радианную.

В табл. I верхние надписи относятся к аргументам, приведенным в левой крайней колонке, а нижние надписи — к аргументам, расположенным в правой крайней колонке.

Шаг таблицы равен одному градусу.

Пользоваться табл. I очень легко. Если аргумент α равен целому числу градусов, то ответ находим на пересечении строки данного аргумента и колонки искомой функции. Например, для $\alpha = 17°$ имеем:

$\sin 17° = 0{,}2924$; $\operatorname{tg} 17° = 0{,}3057$; $\operatorname{cosec} 17° = 3{,}420$; $\cos 17° = 0{,}9563$.

При $\alpha > 45°$ значения аргумента берем в крайней правой колонке, а соответствующие функции в нижней строке, например, для $\alpha = 54°$ находим

$\sin 54° = 0{,}8090$; $\sec 54° = 1{,}701$; $\operatorname{ctg} 54° = 0{,}7265$; $\cos 54° = 0{,}5878$.

Табл. I построена с учетом формул приведения

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$; $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$;...,

поэтому двум углам, дополняющим один другой до 90°, соответствует одно и то же табличное значение двух функций, например,

$$\sin 27° = \cos 63° = 0{,}4540; \quad \operatorname{tg} 27° = \operatorname{ctg} 63° = 0{,}5095.$$

Если аргумент не выражается целым числом градусов, то искомое значение функции находим при помощи линейной интерполяции, осуществляемой по формуле:

$$y(\alpha_0 + \Delta\alpha) = y(\alpha_0) + \Delta y, \tag{1}$$

где α_0 — табличное значение аргумента, т. е. та часть аргумента $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, которая выражается целым числом градусов, $\Delta\alpha$ — приращение аргумента, Δy — приращение функции, y — любая из три-

гонометрических функций, т. е. $y(\alpha) = \sin\alpha$; либо $y(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; либо $y(\alpha) = \sec\alpha$; либо $y(\alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$ и т. д.

Значение приращения функции Δy, соответствующее данному приращению аргумента $\Delta\alpha$, определяется при помощи следующей интерполяционной пропорции

$$\frac{\Delta y}{d} = \frac{\Delta\alpha}{s}, \tag{2}$$

где s — шаг таблицы (в табл. I шаг $s = 1^\circ = 60'$) и d — табличная разность, т. е. разность между двумя соседними значениями искомой функции в таблице.

Значения d (на тех участках, где линейная интерполяция обеспечивает требуемую точность) приведены в самой таблице мелким шрифтом между соответствующими строками.

Табличная разность будет положительной, если функция (на данном участке) возрастает, и отрицательной, если функция убывает. Табличная разность равна приращению функции Δy, когда приращение аргумента равно шагу таблицы, т. е., если $\Delta\alpha = s$, то согласно формуле (2),

$$d = \Delta y = y(\alpha_0 + 1^\circ) - y(\alpha_0).$$

Табличная разность выражается непосредственно в единицах последнего десятичного разряда и, например, если для $y = \cos 19^\circ$ в табл. I $d = -58$, то это означает, что

$$d = \cos 20^\circ - \cos 19^\circ = 0{,}9397 - 0{,}9455 = -0{,}0058.$$

Поясним теперь на примере, как фактически осуществлять интерполяцию. Пусть требуется найти $y = \sin 32^\circ{,}51$.
В данном случае $\alpha_0 = 32^\circ$, $\Delta\alpha = 0^\circ{,}51$, так что по табл. I находим

$$y(\alpha_0) = \sin 32^\circ = 0{,}5299; \quad d = +147.$$

Подставив найденные значения в формулу (2), вычисляем прежде всего приращение искомой функции

$$\Delta y = \frac{d\,\Delta\alpha}{s} = \frac{+147 \cdot 0^\circ{,}51}{1^\circ} = +74{,}97 \approx +75,$$

которое, согласно формуле (1), необходимо прибавить к найденному табличному значению $y(\alpha_0)$. Все вычисления удобно расположить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sin 32^\circ{,}51 &= 0{,}5299 \\ &+ \quad 75 \\ &\overline{0{,}5374}. \end{aligned}$$

Результаты вычислений округляем до четырех значащих цифр, так как большей точности четырехзначная таблица обеспечить не может *.

Если угол α дан не в долях от градуса, а в градусах и минутах, то в интерполяционной пропорции (2) надо брать $s = 60'$. Например, для того чтобы вычислить $y = \operatorname{ctg} 29° 36'$ по формуле (2) находим:

$$\Delta y = \frac{d\,\Delta\alpha}{s} = \frac{-72 \cdot 36'}{60'} = -43{,}2 \approx -43$$

и тогда

$$\begin{array}{r} \operatorname{ctg} 29° 36' = 1{,}804 \\ - \quad 43 \\ \hline 1{,}761. \end{array}$$

Погрешность интерполяции может достигать одной единицы последнего десятичного знака и, например, с 6 значащими цифрами:

$$\sin 32°{,}51 = 0{,}537447;\ \operatorname{ctg} 29° 36' = 1{,}76032.$$

В тех случаях, когда для заданной тригонометрической функции линейная интерполяция не может обеспечить требуемой точности (в табл. I, так же как и в табл. II; на этих участках не приводятся табличные разности) надо при помощи формул § 66 перейти к другой функции, для которой эта точность обеспечена, например,

$$\operatorname{cosec} 4°{,}21 = \frac{1}{\sin 4°{,}21} = \frac{1}{0{,}07341} = 13{,}62.$$

В табл. II приведены с четырьмя значащими цифрами значения тригонометрических функций (кроме $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$) для радианного или абстрактного аргумента. Шаг таблицы $s = 0{,}01$ (радиана). Для каждого значения x в последней колонке приведена также и соответствующая градусная мера.

Вычисления по табл. II для $0 \leqslant x \leqslant \pi$ понятны без каких-либо дополнительных пояснений, только при интерполяции в формуле (2) надо теперь брать $s = 0{,}01$ (радиана) и α заменить на x.

Если же x выходит за указанные границы, то при помощи формул приведения данную функцию приводим к аргументу, который лежит в промежутке $0 - \pi$. При этом для π надо брать его значение с четырьмя десятичными знаками: $\pi = 3{,}1416$.

Вычисление функций по заданному значению аргумента называется решением прямой табличной задачи. Табл. I и II позволяют

---

* Более подробно эти вопросы изложены в книге: Й. Б. Погребиський, П. Ф. Фільчаков, Тригонометрія, изд. 2-е, «Радянська школа», Киев, 1954.

также легко решать и обратную табличную задачу, т. е. задачу определения аргумента по заданному значению функции.

Для этого находим вначале табличное значение функции, ближайшее к заданному, определяем для него d и Δy, а затем по формуле (2), в зависимости от того, выражен ли аргумент в градусах или в радианах, вычисляем

$$\Delta \alpha = \frac{s \Delta y}{d} \text{ или } \Delta x = \frac{s \Delta y}{d}, \qquad (3)$$

т. е. по известным s, d, Δy определяем соответствующее приращение аргумента $\Delta \alpha$ (градусов) или Δx (радианов).

Например, найдем величину x, если известно, что

$$y = \operatorname{tg} x = 0{,}4354.$$

Находим по табл. II ближайшее меньшее табличное значение $y_0 = 0{,}4346$, которому соответствует $x_0 = 0{,}41$. Затем находим $\Delta y = y - y_0 = 0{,}4354 - 0{,}4346 = 0{,}0008 = 8$ десятитысячных и по формуле (3), учтя, что $s = 0{,}01$ и, в данном примере, $d = 120$, находим

$$\Delta x = \frac{0{,}01 \cdot 8}{120} = +0{,}0007.$$

Прибавив теперь найденное приращение аргумента Δx к x_0 мы и получим искомый ответ:

$$x = \operatorname{arctg} 0{,}4354 = x_0 + \Delta x = 0{,}4107.$$

Табл. III служит для перехода от градусной меры углов к радианной, а также и для обратного перехода от радианной меры к градусной.

Как пользоваться этой таблицей, ясно из следующих примеров:

$42° 37',4 = 0{,}7439$ радианов; $1{,}683$ радианов $= 96° 25',7$

$$\begin{array}{r} 40° = 0{,}69813 \\ 2° = 0{,}03491 \\ 30' = 0{,}00873 \\ 7' = 0{,}00204 \\ 0',4 = 0{,}00012 \\ \hline 0{,}74393 \approx 0{,}7439. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}68300 \\ -1{,}57080 = 90° \\ \hline 0{,}11220 \\ -0{,}10472 = 6° \\ \hline 0{,}00748 \\ -0{,}00582 = 20' \\ \hline 0{,}00166 \\ -0{,}00145 = 5' \\ \hline 0{,}00021 = 0',7 \\ \hline 96° 25',7. \end{array}$$

α°	sin α	tg α	sec α	cosec α	ctg α	cos α	α°
0	0,00000	0,00000	1,0000	∞	∞	1,0000	90
	1745	1746	2			—2	
1	0,01745	0,01746	1,0002	57,30	57,29	0,9998	89
	1745	1746	4			—4	
2	0,03490	0,03492	1,0006	28,65	28,64	0,9994	88
	1744	1749	8			—8	
3	0,05234	0,05241	1,0014	19,11	19,08	0,9986	87
	1742	1752	10			—10	
4	0,06976	0,06993	1,0024	14,34	14,30	0,9976	86
	1740	1756	14			—14	
5	0,08716	0,08749	1,0038	11,474	11,430	0,9962	85
	1737	1761	17			—17	
6	0,10453	0,10510	1,0055	9,567	9,514	0,9945	84
	174	177	20			—20	
7	0,1219	0,1228	1,0075	8,206	8,144	0,9925	83
	173	177	23			—22	
8	0,1392	0,1405	1,0098	7,185	7,115	0,9903	82
	172	179	27			—26	
9	0,1564	0,1584	1,0125	6,392	6,314	0,9877	81
	172	179	29			—29	
10	0,1736	0,1763	1,0154	5,759	5,671	0,9848	80
	172	181	33			—32	
11	0,1908	0,1944	1,0187	5,241	5,145	0,9816	79
	171	182	36			—35	
12	0,2079	0,2126	1,0223	4,810	4,705	0,9781	78
	171	183	40			—37	
13	0,2250	0,2309	1,0263	4,445	4,331	0,9744	77
	169	184	43			—41	
14	0,2419	0,2493	1,0306	4,134	4,011	0,9703	76
	169	186	47			—44	
15	0,2588	0,2679	1,0353	3,864	3,732	0,9659	75
	168	188	50			—46	
16	0,2756	0,2867	1,0403	3,628	3,487	0,9613	74
	168	190	54			—50	
17	0,2924	0,3057	1,0457	3,420	3,271	0,9563	73
	166	192	58			—52	
18	0,3090	0,3249	1,0515	3,236	3,078	0,9511	72
	166	194	61			—56	
19	0,3256	0,3443	1,0576	3,072	2,904	0,9455	71
	164	197	66			—58	
20	0,3420	0,3640	1,0642	2,924	2,747	0,9397	70
	164	199	69	—134	—142	—61	
21	0,3584	0,3839	1,0711	2,790	2,605	0,9336	69
	162	201	74	—121	—130	—64	
22	0,3746	0,4040	1,0785	2,669	2,475	0,9272	68
	161	205	79	—110	—119	—67	
α°	cos α	ctg α	cosec α	sec α	tg α	sin α	α°

функций для градусного аргумента

α°	sin α	tg α	sec α	cosec α	ctg α	cos α	α°
23	0,3907	0,4245	1,0864	2,559	2,356	0,9205	67
	160	207	82	—100	—110	—70	
24	0,4067	0,4452	1,0946	2,459	2,246	0,9135	66
	159	211	88	—93	—101	—72	
25	0,4226	0,4663	1,1034	2,366	2,145	0,9063	65
	158	214	92	—85	—95	—75	
26	0,4384	0,4877	1,1126	2,281	2,050	0,8988	64
	156	218	97	—78	—87	—78	
27	0,4540	0,5095	1,1223	2,203	1,963	0,8910	63
	155	222	103	—73	— 82	—81	
28	0,4695	0,5317	1,1326	2,130	1,881	0,8829	62
	153	226	108	—67	—77	—83	
29	0,4848	0,5543	1,1434	2,063	1,804	0,8746	61
	152	231	113	— 63	—72	—86	
30	0,5000	0,5774	1,1547	2,000	1,732	0,8660	60
	150	235	119	—58	—68	—88	
31	0,5150	0,6009	1,1666	1,942	1,664	0,8572	59
	149	240	126	—55	—64	—92	
32	0,5299	0,6249	1,1792	1,887	1,600	0,8480	58
	147	245	132	—51	—60	—93	
33	0,5446	0,6494	1,1924	1,836	1,540	0,8387	57
	146	251	138	—48	—57	—97	
34	0,5592	0,6745	1,2062	1,788	1,4826	0,8290	56
	144	257	146	—45	—545	—98	
35	0,5736	0,7002	1,2208	1,743	1,4281	0,8192	55
	142	263	153	—42	—517	—102	
36	0,5878	0,7265	1,2361	1,701	1,3764	0,8090	54
	140	271	160	—39	—494	—104	
37	0,6018	0,7536	1,2521	1,662	1,3270	0,7986	53
	139	277	169	—38	—471	—106	
38	0,6157	0,7813	1,2690	1,624	1,2799	0,7880	52
	136	285	178	—35	—450	—109	
39	0,6293	0,8098	1,2868	1,589	1,2349	0,7771	51
	135	293	186	—33	—431	—111	
40	0,6428	0,8391	1,3054	1,556	1,1918	0,7660	50
	133	302	196	—32	—414	—113	
41	0,6561	0,8693	1,3250	1,524	1,1504	0,7547	49
	130	311	206	—30	—398	—116	
42	0,6691	0,9004	1,3456	1,494	1,1106	0,7431	48
	129	321	217	—28	—382	—117	
43	0,6820	0,9325	1,3673	1,466	1,0724	0,7314	47
	127	332	229	—26	—369	—121	
44	0,6947	0,9657	1,3902	1,440	1,0355	0,7193	46
	124	343	240	—26	—355	—122	
45	0,7071	1,0000	1,4142	1,414	1,0000	0,7071	45
α°	cos α	ctg α	cosec α	sec α	tg α	sin α	α°

Таблица II

Четырехзначная таблица тригонометрических функций для радианного и абстрактного аргументов

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
0,00	0,00000	0,00000	∞	1,0000	0,00	0°
	1000	1000		0		
01	01000	01000	100,00	1,0000	01	0° 34′
	1000	1000		−2		
02	02000	02000	50,00	0,9998	02	1° 09′
	1000	1001		−2		
03	03000	03001	33,32	9996	03	1° 43′
	999	1001		−4		
04	03999	04002	24,99	9992	04	2° 18′
	999	1002		−4		
0,05	0,04998	0,05004	19,98	0,9988	0,05	2° 52′
	998	1003		−6		
06	05996	06007	16,65	9982	06	3° 26′
	998	1004		−6		
07	06994	07011	14,26	9976	07	4° 01′
	997	1006		−8		
08	07991	08017	12,47	9968	08	4° 35′
	997	1007		−8		
09	0,8988	09024	11,082	9960	09	5° 09′
	995	1009		−10		
0,10	0,09983	0,10033	9,967	0,9950	0,10	5° 44′
	995	101		−10		
11	10978	1104	054	9940	11	6° 18′
	99	102		−12		
12	1197	1206	8,293	9928	12	6° 53′
	99	101		−12		
13	1296	1307	7,649	9916	13	7° 27′
	99	102		−14		
14	1395	1409	7,096	9902	14	8° 01′
	99	102		−14		
0,15	0,1494	0,1511	6,616	0,9888	0,15	8° 36′
	99	103		−16		
16	1593	1614	197	9872	16	9° 10′
	99	103		−16		
17	1692	1717	5,825	9856	17	9° 44′
	98	103		−18		
18	1790	1820	495	9838	18	10° 19′
	99	103		−18		
19	1889	1923	200	9820	19	10° 53′
	98	104		−19		
0,20	0,1987	0,2027	4,933	0,9801	0,20	11° 28′
	98	104		−21		
21	2085	2131	692	9780	21	12° 02′
	97	105		−21		
22	2182	2236	472	9759	22	12° 36′
	98	105		−22		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
0,23	0,2280	0,2341	4,271	0,9737	0,23	13° 11′
	97	106		—24		
24	2377	2447	086	9713	24	13° 45′
	97	106		—24		
0,25	0,2474	0,2553	3,916	0,9689	0,25	14° 19′
	97	107		—25		
26	2571	2660	759	9664	26	14° 54′
	96	108		—26		
27	2667	2768	613	9638	27	15° 28′
	97	108		—27		
28	2764	2876	478	9611	28	16° 03′
	96	108		—29		
29	2860	2984	351	9582	29	16° 37′
	95	109		—29		
0,30	0,2955	0,3093	3,233	0,9553	0,30	17° 11′
	96	110		—30		
31	3051	3203	122	9523	31	17° 46′
	95	111		—31		
32	3146	3314	018	9492	32	18° 20′
	94	111		—32		
33	3240	3425	2,920	9460	33	18° 54′
	95	112		—32		
34	3335	3537	827	9428	34	19° 29′
	94	113		—34		
0,35	0,3429	0,3650	2,740	0,9394	0,35	20° 03′
	94	114	—83	—35		
36	3523	3764	657	9359	36	20° 38′
	93	115	—79	—36		
37	3616	3879	578	9323	37	21° 12′
	93	115	—74	—36		
38	3709	3994	504	9287	38	21° 46′
	93	116	—71	—38		
39	3802	4110	433	9249	39	22° 21′
	92	118	—68	—38		
0,40	0,3894	0,4228	2,365	0,9211	0,40	22° 55′
	92	118	—64	—40		
41	3986	4346	301	9171	41	23° 29′
	92	120	—62	—40		
42	4078	4466	239	9131	42	24° 04′
	91	120	—59	—41		
43	4169	4586	180	9090	43	24° 38′
	90	122	—56	—42		
44	4259	4708	124	9048	44	25° 13′
	91	123	—54	—44		
0,45	0,4350	0,4831	2,070	0,9004	0,45	25° 47′
	90	123	—52	—43		
46	4440	4954	018	8961	46	26° 21′
	89	126	—49	—45		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
0,47	0,4529	0,5080	1,969	0,8916	0,47	26° 56′
	89	126	—48	—46		
48	4518	5206	921	8870	48	27° 30′
	88	128	—46	—47		
49	4706	5334	875	8823	49	28° 04′
	88	129	—45	—47		
0,50	0,4794	0,5463	1,830	0,8776	0,50	28° 39′
	88	131	—42	—49		
51	4882	0,5594	788	0,8727	51	29° 13′
	87	132	—41	—49		
52	4969	5726	747	8678	52	29° 48′
	86	133	—40	—50		
53	5055	5859	707	8628	53	30° 22′
	86	135	—39	—51		
54	5141	5994	668	8577	54	30° 56′
	86	137	—37	—52		
0,55	0,5227	0,6131	1,631	0,8525	0,55	31° 31′
	85	139	—36	—52		
56	5312	6270	595	8473	56	32° 05′
	84	140	—35	—54		
57	5396	6410	560	8419	57	32° 40′
	84	142	—34	—54		
58	5480	6552	526	8365	58	33° 14′
	84	144	—33	—56		
59	5564	6696	493	8309	59	33° 48′
	82	145	—31	—56		
0,60	0,5646	0,6841	1,462	0,8253	0,60	34° 23′
	83	148	—31	—57		
61	5729	6989	431	8196	61	34° 57′
	81	150	—30	—57		
62	5810	7139	401	8139	62	35° 31′
	81	152	—29	—59		
63	5891	7291	372	8080	63	36° 06′
	81	154	—29	—59		
64	5972	7445	343	8021	64	36° 40′
	80	157	—28	—60		
0,65	0,6052	0,7602	1,315	0,7961	0,65	37° 15′
	79	159	—27	—61		
66	6131	7761	288	7900	66	37° 49′
	79	162	—26	—62		
67	6210	7923	262	7838	67	38° 23′
	78	164	—25	—62		
68	6288	8087	237	7776	68	38° 58′
	77	166	—25	—64		
69	6365	8253	212	7712	69	39° 32′
	77	170	—25	—64		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
0,70	0,6442	0,8423	1,187	0,7648	0,70	40° 06′
	76	172	—24	—64		
71	6518	8595	163	7584	71	40° 41′
	76	176	—23	—66		
72	6594	8771	140	7518	72	41° 15′
	75	178	—23	—66		
73	6669	8949	117	7452	73	41° 50′
	74	182	—22	—67		
74	6743	9131	095	7385	74	42° 24′
	73	185	—22	—68		
0,75	0,6816	0,9316	1,073	0,7317	0,75	42° 58′
	73	188	—21	—69		
76	6889	9504	052	7248	76	43° 33′
	72	193	—21	—69		
77	6961	9697	031	7179	77	44° 07′
	72	196	—20	—70		
78	7033	9893	0109	7109	78	44° 41′
	71	199	—201	—71		
79	7104	1,0092	0,9908	7038	79	45° 16′
	70	204	—196	—69		
0,80	0,7174	1,0296	0,9712	0,6967	0,80	45° 50′
	69	209	—192	—72		
81	7243	0505	9520	6895	81	46° 25′
	68	212	—189	—73		
82	7311	0717	9331	6822	82	46° 59′
	68	217	—185	—73		
83	7379	0934	9146	6749	83	47° 33′
	67	222	—182	—74		
84	7446	1156	8964	6675	84	48° 08′
	67	227	—179	—75		
0,85	0,7513	1,1383	0,8785	0,6600	0,85	48° 42′
	65	233	—176	—76		
86	7578	1616	8609	6524	86	49° 16′
	65	237	—172	—76		
87	7643	1853	8437	6448	87	49° 51′
	64	244	—170	—76		
88	7707	2097	8267	6372	88	50° 25′
	64	249	—167	—78		
89	7771	2346	8100	6294	89	51° 00′
	62	256	—164	—78		
0,90	0,7833	1,2602	0,7936	0,6216	0,90	51° 34′
	62	262	—162	—79		
91	7895	2864	7774	6137	91	52° 08′
	61	269	—159	—79		
92	7956	3133	7615	6058	92	52° 43′
	60	276	—157	—80		
93	8016	3409	7458	5978	93	53° 17′
	60	283	— 155	—80		
94	8076	3692	7303	5898	94	53° 51′
	58	292	—152	—81		

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
0,95	0,8134	1,3984	0,7151	0,5817	0,95	54° 26′
	58	300	−150	−82		
96	8192	4284	7001	5735	96	55° 00′
	57	308	−148	−82		
97	8249	4592	6853	5653	97	55° 35′
	56	318	−146	−83		
98	8305	4910	6707	5570	98	56° 09′
	55	327	−144	−83		
99	8360	5237	6563	5487	99	56° 43′
	55	337	−142	−84		
1,00	0,8415	1,5574	0,6421	0,5403	1,00	57° 18′
	53	35	−140	−84		
01	8468	592	6281	5319	01	57° 52′
	53	36	−139	−85		
02	8521	628	6142	5234	02	58° 26′
	52	37	−137	−86		
03	8573	665	6005	5148	03	59° 01′
	51	39	−135	−86		
04	8624	704	5870	5062	04	59° 35′
	50	39	−134	−86		
1,05	0,8674	1,743	0,5736	0,4976	1,05	60° 10′
	50	41	−132	−87		
06	8724	784	5604	4889	06	60° 44′
	48	43	−131	−88		
07	8772	827	5473	4801	07	61° 18′
	48	44	−129	−88		
08	8820	871	5344	4713	08	61° 53′
	46	45	−128	−88		
09	8866	917	5216	4625	09	62° 27′
	46	48	−126	−89		
1,10	0,8912	1,965	0,5090	0,4536	1,10	63° 02′
	45	49	−126	−89		
11	8957	2,014	4964	4447	11	63° 36′
	44	52	−124	−90		
12	9001	066	4840	4357	12	64° 10′
	43	54	−123	−90		
13	9044	120	4717	4267	13	64° 45′
	42	56	−121	−91		
14	9086	176	4596	4176	14	65° 19′
	42	58	−121	−91		
1,15	0,9128	2,234	0,4475	0,4085	1,15	65° 53′
	40	62	−119	−92		
16	9168	296	4356	3993	16	66° 28′
	40	64	−119	−91		
17	9208	360	4237	3902	17	67° 02′
	38	67	−117	−93		
18	9246	427	4120	3809	18	67° 37′
	38	71	−117	−92		
19	9284	498	4003	3717	19	68° 11′
	36	74	−115	−93		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
1,20	0,9320	2,572	0,3888	0,3624	1,20	68° 45′
	36	78	−115	−94		
21	9356	650	3773	3530	21	69° 20′
	35	83	−114	−94		
22	9391	733	3659	3436	22	69° 54′
	34		−113	−94		
23	9425	820	3546	3342	23	70° 28′
	33		−112	−94		
24	9458	912	3434	3248	24	71° 03′
	32		−111	−95		
1,25	0,9490	3,010	0,3323	0,3153	1,25	71° 37′
	31		−111	−95		
26	9521	113	3212	3058	26	72° 12′
	30		−110	−95		
27	9551	224	3102	2963	27	72° 46′
	29		−109	−96		
28	9580	341	2993	2867	28	73° 20′
	28		−109	−96		
29	9608	467	2884	2771	29	73° 55′
	28		−108	−96		
1,30	0,9636	3,602	0,2776	0,2675	1,30	74° 29′
	26		−107	−96		
31	9662	747	2669	2579	31	75° 03′
	25		−107	−97		
32	9687	903	2562	2482	32	75° 38′
	24		−106	−97		
33	9711	4,072	2456	2385	33	76° 12′
	24		−106	−97		
34	9735	256	2350	2288	34	76° 47′
	22		−105	−98		
1,35	0,9757	4,455	0,2245	0,2190	1,35	77° 21′
	22		−105	−98		
36	9779	673	2140	2092	36	77° 55′
	20		−105	−98		
37	9799	913	2035	1994	37	78° 30′
	20		−104	−98		
38	9819	5,177	1931	1896	38	79° 04′
	18		−103	−98		
39	9837	471	1828	1798	39	79° 38′
	17		−103	−98		
1,40	0,9854	5,798	0,1725	0,1700	1,40	80° 13′
	17		−103	−99		
41	9871	6,165	1622	1601	41	80° 47′
	16		−102	−99		
42	9887	581	1520	1502	42	81° 22′
	14		−103	−99		
43	9901	7,055	1417	1403	43	81° 56′
	14		−102	−99		
44	9915	602	1315	1304	44	82° 30′
	12		−101	−99		

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
1,45	0,9927	8,238	0,1214	0,1205	1,45	83° 05′
	12		—101	—99		
46	9939	989	1113	1106	46	83° 39′
	10		—102	—100		
47	9949	9,887	1011	10063	47	84° 13′
	10		—101	—996		
48	9959	10,983	09105	09067	48	84° 48′
	8		—1008	—996		
49	9967	12,35	08097	08071	49	85° 22′
	8		—1006	—997		
1,50	0,9975	14,10	0,07091	0,07074	1,50	85° 57′
	7		—1004	—998		
51	9982	16,43	06087	06076	51	86° 31′
	5		—1003	—999		
52	9987	19,67	05084	05077	52	87° 05′
	5		—1002	—998		
53	9992	24,50	04082	04079	53	87° 40′
	3		—1001	—1000		
54	9995	32,46	03081	03079	54	88° 14′
	3		—1001	—1000		
1,55	0,9998	48,08	0,02080	0,02079	1,55	88° 49′
	1		—1000	—999		
56	9999	92,62	01080	01080	56	89° 23′
	1		—1000	—1000		
57	1,0000	1256	0007963	0007963	57	89° 57′
$\frac{\pi}{2}$	1,0000	∞	0	0	$\frac{\pi}{2}$	90°
58	1,0000	—108,6	—0,009204	—0,009203	58	90° 32′
	—2		—1001	—1000		
59	0,9998	—52,07	01921	01920	59	91° 06′
	—2		—1000	—1000		
1,60	0,9996	—34,23	—0,02921	—0,02920	1,60	96° 40′
	—4		—1001	—999		
61	9992	—25,49	03922	03919	61	92° 15′
	—4		—1002	—999		
62	9988	—20,31	04924	04918	62	92° 49′
	—6		—1003	—999		
63	9982	—16,87	05927	05917	63	93° 24′
	—6		—1004	—998		
64	9976	—14,43	06931	06915	64	93° 58′
	—7		—1006	—997		
1,65	0,9969	—12,60	—0,07937	—0,07912	1,65	94° 32′
	—9		—1007	—997		
66	9960	—11,18	08944	08909	66	95° 07′
	—9		—1009	—995		
67	9951	—10,047	09953	09904	67	95° 41′
	—11		—1011	—995		
68	9940	—9,121	10964	10899	68	96° 15′
	—11		—102	—99		
69	9929	—8,349	1198	1189	69	96° 50′
	—12		—101	—99		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
1,70	0,9917	—7,697	—0,1299	—0,1288	1,70	97° 24′
	—14		—102	—100		
71	9903	137	1401	1388	71	97° 59′
	—14		—102	—99		
72	9889	—6,652	1503	1487	72	98° 33′
	—15		—103	—98		
73	9874	228	1606	1585	73	99° 07′
	—17		—102	—99		
74	9857	—5,853	1708	1684	74	99° 42′
	—17		—103	—98		
1,75	0,9840	—5,520	—0,1811	0,1782	1,75	100° 16′
	—18		—104	—99		
76	9822	222	1915	1881	76	100° 50′
	—20		—104	—98		
77	9802	—4,953	2019	1979	77	101° 25′
	—20		—104	—98		
78	9782	710	2123	2077	78	101° 59′
	—21		—105	—98		
79	9761	489	2228	2175	79	102° 34′
	—23		—105	—97		
1,80	0,9738	—4,286	—0,2333	—0,2272	1,80	103° 08′
	—23		—106	—97		
81	9715	100	2439	2369	81	103° 42′
	—24		—106	—97		
82	9691	—3,929	2545	2466	82	104° 17′
	—25		—107	—97		
83	9666	771	2652	2563	83	104° 51′
	—26		—107	—97		
84	9640	624	2759	2660	84	105° 25′
	—27		—108	—96		
1,85	0,9613	—3,488	—0,2867	—0,2756	1,85	106° 00′
	—28		—108	—96		
86	9585	361	2975	2852	86	106° 34′
	—29		—110	—96		
87	9556	242	3085	2948	87	107° 09′
	—30		—109	—95		
88	9526	130	3194	3043	88	107° 43′
	—31		—111	—95		
89	9495	026	3305	3138	89	108° 17′
	—32		—111	—95		
1,90	0,9463	—2,927	—0,3416	—0,3233	1,90	108° 52′
	—33		—112	—94		
91	9430	834	3528	3327	91	109° 26′
	—34		—113	—94		
92	9396	746	3641	3421	92	110° 00′
	—34	83	—114	—94		
93	9362	663	3755	3515	93	110° 35′
	—36	79	—115	—94		
94	9326	584	3870	3609	94	111° 09′
	—36	75	—115	—93		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
1,95	0,9290	−2,509	−0,3985	0,3702	1,95	111° 44′
	−38	71	−116	−93		
96	9252	438	4101	3795	96	112° 48′
	−38	68	−118	−92		
97	9214	370	4219	3887	97	112° 52′
	−40	64	−118	−92		
98	9174	306	4337	3979	98	113° 27′
	−40	62	−119	−91		
99	9134	244	4456	4070	99	114° 01′
	−41	59	−121	−91		
2,00	0,9093	−2,185	−0,4577	−0,4161	2,00	114° 36′
	−42	57	−121	−91		
01	9051	128	4698	4252	01	115° 10′
	−43	54	−123	−90		
02	9008	074	4821	4342	02	115° 44′
	−44	52	−124	−90		
03	8964	022	4945	4432	03	116° 19′
	−45	50	−125	−90		
04	8919	−1,972	5070	4522	04	116° 53′
	−45	47	−126	−89		
2,05	0,8874	−1,925	−0,5196	−0,4611	2,05	117° 27′
	−47	47	−128	−88		
06	8827	878	5324	4699	06	118° 02′
	−47	44	−129	−88		
07	8780	834	5453	4787	07	118° 36′
	−49	43	−130	−88		
08	8731	791	5583	4875	08	119° 11′
	−49	41	−132	−87		
09	8682	750	5715	4962	09	119° 45′
	−50	40	−134	−86		
2,10	0,8632	−1,710	−0,5849	−0,5048	2,10	120° 19′
	−51	39	−134	−86		
11	8581	671	5983	5134	11	120° 54′
	−52	37	−137	−86		
12	8529	634	6120	5220	12	121° 28′
	−52	36	−138	−85		
13	8477	598	6258	5305	13	122° 02′
	−54	35	−140	−85		
14	8423	563	6398	5390	14	122° 37′
	−54	34	−142	−84		
2,15	0,8369	−1,529	−0,6540	−0,5474	2,15	123° 11′
	−55	33	−144	−83		
16	8314	496	6684	5557	16	123° 46′
	−56	32	−146	−83		
17	8258	464	6830	5640	17	124° 20′
	−57	31	−147	−82		
18	8201	433	6977	5722	18	124° 54′
	−58	30	−150	−82		
19	8143	403	7127	5804	19	125° 29′
	−58	29	−152	−81		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
2,20	0,8085	—1,374	—0,7279	—0,5885	2,20	126° 03′
	—59	29	—154	—81		
21	8026	345	7433	5956	21	126° 37′
	—60	27	—156	—80		
22	7966	318	7589	6046	22	127° 12′
	—61	27	—159	—79		
23	7905	291	7748	6125	23	127° 46′
	—62	27	—162	—79		
24	7843	264	7910	6204	24	128° 21′
	—62	25	—163	—78		
2,25	0,7781	—1,239	—0,8073	—0,6282	2,25	128° 55′
	—63	25	—167	—77		
26	7718	214	8240	6359	26	129° 29′
	—64	25	—169	—77		
27	7654	189	8409	6436	27	130° 04′
	—65	24	—172	—76		
28	7589	165	8581	6512	28	130° 38′
	—66	23	—176	—76		
29	7523	142	8757	6588	29	131° 12′
	—66	23	—178	—75		
2,30	0,7457	—1,119	—0,8935	—0,6663	2,30	131° 47′
	—67	22	—181	—74		
31	7390	097	9116	6737	31	132° 21′
	—68	22	—185	—74		
32	7322	075	9301	6811	32	132° 56′
	—68	21	—188	—72		
33	7254	054	9489	6883	33	133° 30′
	—69	21	—192	—73		
34	7185	033	9681	6956	34	134° 04′
	—70	20	—196	—71		
2,35	0,7115	—1,0125	—0,9877	—0,7027	2,35	134° 39′
	—71	201	—199	—71		
36	7044	0,9924	—1,0076	7098	36	135° 13′
	—71	196	—20	—70		
37	6973	9728	028	7168	37	135° 47′
	—72	193	—21	—69		
38	6901	9535	049	7237	38	136° 22′
	—73	189	—21	—69		
39	6828	9346	070	7306	39	136° 56′
	—73	186	—22	—68		
2,40	0,6755	—0,9160	—1,092	—0,7374	2,40	137° 31′
	—74	182	—22	—67		
41	6681	8978	114	7441	41	138° 05′
	—75	179	—23	—67		
42	6606	8799	137	7508	42	138° 39′
	—76	176	—23	—65		
43	6530	8623	160	7573	43	139° 14′
	—76	173	—23	—65		
44	6454	8450	183	7638	44	139° 48′
	—76	170	—25	—64		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
2,45	0,6378	−0,8280	−1,208	−0,7702	2,45	140° 22′
	−78	167	−25	−64		
46	6300	8113	233	7766	46	140° 57′
	−78	165	−25	−62		
47	6622	7948	258	7828	47	141° 31′
	−78	161	−26	−62		
48	6144	7787	284	7890	48	142° 06′
	−79	160	−27	−61		
49	6065	7627	311	7951	49	142° 40′
	−80	157	−28	−60		
2,50	0,5985	−0,7470	−1,339	−0,8011	2,50	143° 14′
	−81	154	−28	−60		
51	5904	7316	367	8071	51	143° 49′
	−81	153	−29	−59		
52	5823	7163	396	8130	52	144° 23′
	−81	150	−30	−57		
53	5742	7013	426	8187	53	144° 58′
	−82	148	−31	−57		
54	5660	6865	457	8244	54	145° 32′
	−83	146	−31	−57		
2,55	0,5577	−0,6719	−1,488	−0,8301	2,55	146° 06′
	−83	145	−33	−55		
56	5494	6574	521	8356	56	146° 41′
	−84	142	−34	−54		
57	5410	6432	555	8410	57	147° 15′
	−85	140	−34	−54		
58	5325	6292	589	8464	58	147° 49′
	−85	139	−36	−53		
59	5240	6153	625	8517	59	148° 24′
	−85	137	−37	−52		
2,60	0,5155	−0,6016	−1,662	−0,8569	2,60	148° 58′
	−86	135	−38	−51		
61	5069	5881	700	8620	61	149° 33′
	−86	134	−40	−50		
62	4983	5747	740	8670	62	150° 07′
	−87	132	−41	−50		
63	4896	5615	781	8720	63	150° 41′
	−88	131	−43	−48		
64	4808	5484	824	8768	64	151° 16′
	−88	130	−44	−48		
2,65	0,4720	−0,5354	−1,868	−0,8816	2,65	151° 50′
	−88	128	−45	−47		
66	4632	5226	913	8863	66	152° 24′
	−89	126	−48	−45		
67	4543	5100	961	8908	67	152° 59′
	−89	126	−49	−45		
68	4454	4974	−2,010	8953	68	153° 33′
	−90	124	−52	−45		
69	4364	4850	062	8998	69	154° 08′
	−90	123	−53	−43		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
2,70	0,4274	−0,4727	−2,115	−0,9041	2,70	154° 42′
	−91	121	−56	−42		
71	4183	4606	171	9083	71	155° 16′
	−91	121	−59	−41		
72	4092	4485	230	9124	72	155° 51′
	−91	120	−61	−41		
73	4001	4365	291	9165	73	156° 25′
	−92	118	−64	−39		
74	3909	4247	355	9204	74	156° 59′
	−92	118	−67	−39		
2,75	0,3817	−0,4129	−2,422	−0,9243	2,75	157° 34′
	−93	116	−70	−38		
76	3724	4013	492	9281	76	158° 08′
	−93	116	−74	−37		
77	3631	3897	566	9318	77	158° 43′
	−93	115	−78	−35		
78	3538	3782	644	9353	78	159° 17′
	−94	114	−82	−35		
79	3444	3668	726	9388	79	159° 51′
	−94	113	−87	−34		
2,80	0,3350	−0,3555	−2,813	−0,9422	2,80	160° 26′
	−94	112		−33		
81	3256	3443	904	9455	81	161° 00′
	−95	111		−32		
82	3161	3332	−3,002	9487	82	161° 34′
	−95	111		−31		
83	3066	3221	105	9518	83	162° 09′
	−96	110		−31		
84	2970	3111	215	9549	84	162° 43′
	−95	109		−29		
2,85	0,2875	−0,3002	−3,332	−0,9578	2,85	163° 18′
	−96	109		−28		
86	2779	2893	457	9606	86	163° 52′
	−96	108		−27		
87	2683	2785	591	9633	87	164° 26′
	−97	108		−27		
88	2586	2677	735	9660	88	165° 01′
	−97	107		−25		
89	2489	2570	890	9685	89	165° 35′
	−97	106		−25		
2,90	0,2392	−0,2464	−4,058	−0,9710	2,90	166° 09′
	−97	106		−23		
91	2295	2358	241	9733	91	166° 44′
	−97	105		−22		
92	2198	2253	439	9755	92	167° 18′
	−98	105		−22		
93	2100	2148	655	9777	93	167° 53′
	−98	104		−20		
94	2002	2044	893	9797	94	168° 27′
	−98	104		−20		

Продолжение табл. II

x	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\cos x$	x	Градусная мера
2,95	0,1904	−0,1940	−5,155	−0,9817	2,95	169° 01′
	−98	104		−19		
96	1806	1836	446	9836	96	169° 36′
	−98	103		−17		
97	1708	1733	770	9853	97	170° 10′
	−99	103		−17		
98	1609	1630	−6,135	9870	98	170° 44′
	−99	102		−15		
99	1510	1528	546	9885	99	171° 19′
	−99	103		−15		
3,00	0,1411	−0,1425	−7,015	−0,9900	3,00	171° 53
	−99	101		−14		
01	1312	1324	555	9914	01	172° 28′
	−99	102		−12		
02	1213	1222	−8,183	9926	02	173° 02′
	−99	101		−12		
03	1114	1121	924	9938	03	173° 36′
	−100	102		−10		
04	1014	10194	−9,810	9948	04	174° 11′
	−99	1009		−10		
3,05	0,09146	−0,09185	−10,887	−0,9958	3,05	174° 45′
	−996	1008		−9		
06	08150	08177	−12,23	9967	06	175° 20′
	−997	1005		−7		
07	07153	07172	−13,94	9974	07	175° 54′
	−998	1005		−7		
08	06155	06167	−16,22	9981	08	176° 28′
	−998	1003		−6		
09	05157	05164	−19,36	9987	09	177° 03′
	−999	1002		−4		
3,10	0,04158	−0,04162	−24,03	−0,9991	3,10	177° 37′
	−999	1002		−4		
11	03159	03160	−31,65	9995	11	178° 11′
	−1000	1000		−3		
12	02159	02160	−46,30	9998	12	178° 46′
	−1000	1001		−1		
13	01159	01159	−86,28	9999	13	179° 20′
	−1000	1000		−1		
14	001593	001593	−627,9	−1,0000	14	179° 55′
π	0	0	$-\infty$	−1,0000	π	180°

Таблица III

Переход от градусной меры углов к радианной

Градусная мера	Радианная мера	Градусная мера	Радианная мера	Градусная мера	Радианная мера
0′,1	0,00002909	11°	0,19199	31°	0,54105
1′	0,0002909	12°	0,20943	32°	0,55850
2′	0,0005818	13°	0,22689	33°	0,57596
3′	0,0008727	14°	0,24435	34°	0,59341
4′	0,0011636	15°	0,26180	35°	0,61086
5′	0,0014544				
6′	0,0017453	16°	0,27925	36°	0,62832
7′	0,002036	17°	0,29671	37°	0,64577
8′	0,002327	18°	0,31416	38°	0,66322
9′	0,002618	19°	0,33161	39°	0,68068
		20°	0,34907	40°	0,69813
1°	0,017453				
2°	0,03491	21°	0,36652	45°	0,78540
3°	0,05236	22°	0,38397	50°	0,87266
4°	0,06981	23°	0,40143	55°	0,95993
5°	0,08727	24°	0,41888	60°	1,04720
		25°	0,43633	65°	1,13446
6°	0,10472				
7°	0,12217	26°	0,45379	70°	1,22173
8°	0,13963	27°	0,47124	75°	1,30900
9°	0,15708	28°	0,48869	80°	1,39626
10°	0,17453	29°	0,50614	85°	1,48353
		30°	0,52360	90°	1,57080

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия, ч. 1, ч. 2, Учпедгиз, М., 1957, 1958.

2. Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение, Учпедгиз, М., 1950.

3. Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И. Сборник задач по элементарной математике, Физматгиз, М., 1964.

4. Барыбин К. С. Сборник геометрических задач на доказательство, Учпедгиз, М., 1952.

5. Берман А. Ф., Люстерник Л. А. Тригонометрия, Гостехиздат, М., 1956.

6. Болтянский В. Г., Яглом И. М., Векторы в курсе геометрии средней школы, Учпедгиз, М., 1962. Преобразования. Векторы, «Просвещение», М., 1964.

7. Бугай А. С., Краткий толковый математический словарь, «Радянська школа», К., 1964.

8. Выгодский М. Я., Справочник по элементарной математике, «Наука», М., 1965.

9. Залогин Н. С., Конкурсные задачи по математике. Гостехиздат, 1964.

10. Киселев А. П., Геометрия, ч. 1, ч. 2, «Просвещение», М., 1965.

11. Кущенко В. С., Сборник конкурсных задач по математике, «Судостроение», Л., 1964.

12. Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И., Задачи по элементарной математике, Физматгиз, М., 1963.

13. Лоповок Л. М., Сборник задач по стереометрии, «Радянська школа», К., 1955.

14. Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И., Федин Н. Г., Толковый словарь математических терминов, «Просвещение», М., 1965.

15 Моденов П. С., Сборник задач по математике, «Советская наука», М., 1952.
16. Новоселов С. И., Тригонометрия, Учпедгиз, М., 1956.
17. Погребиський І. Б., П. Ф. Фільчаков, Тригонометрія, «Радянська школа», К., 1954.
18. Позойский Р. И., Сборник задач по тригонометрии, «Радянська школа», К., 1953.
19. Рыбкин Н., Сборник задач по геометрии, ч. 1, ч. 2, Учпедгиз, М., 1962.
20. Рыбкин Н., Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, М., 1950.
21. Рывкин А. А., Рывкин А. З., Хренов Л. С., Справочник по математике, «Высшая школа», М., 1964.
22. Смогоржевский А. С., Исследование задач на построение, «Радянська школа», К., 1961.
23. Стражевский А. А., Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы, Учпедгиз, М., 1954.
24. Стратилатов П. В., Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, М., 1957.
25. Худобин А. И., Худобин Н. И., Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, М., 1955.
26. Четверухин Н. Ф., Методы геометрических построений, Учпедгиз, М., 1938.
27. Шахно К. У., Сборник задач по математике, Учпедгиз, Л., 1954.
28. Шахно К. У., Справочник по математике, Учпедгиз, М., 1961.
29. Шиманский Р. И., Тригонометрия, «Радянська школа», К., 1961.
30. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2, ч. 3, Гостехиздат, М., 1954.
31. Энциклопедия элементарной математики, том IV (Геометрия), Физматгиз, М., 1963.
32. Яглом И. М., Геометрические преобразования, т. 1, т. 2, Гостехиздат, М., 1955, 1956.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная величина 409
Абстрактный аргумент 295
Абсцисса вектора 387
Аксиома 22
— Архимеда 18, 24
— о параллельных прямых 24
Аксиом классификация 22
— система 22
Аксиомы конгруэнтности 24
— линейной полноты 24
— непрерывности 24
— соединения порядка 23
— соединения 22
Алгебра векторная 375
Алгебраический метод решения задач на построение 154
Амплитуда колебаний 307
Аналитическая геометрия 12
Аполлоний 152
Апофема правильного многоугольника 114
— правильной пирамиды 199
— усеченной пирамиды 207
Аргумент 295
— абстрактный 295
— вспомогательный 294
— половинный 286
Арккосинус 338
Арккотангенс 339
Арксинус 338
Арктангенс 340
Архимед 18, 61, 100, 101
Архимеда аксиома 18, 24
Ассоциативность 396
Базисная система векторов 389
Бесконечная прямая 14
Биссектриса внешнего угла треугольника 49
— угла 28
— треугольника 47
Боковая поверхность конуса 231 232
— — отрезка цилиндра 226
— — пирамиды 201
— — призмы 191
— — усеченного конуса 237
— — усеченной пирамиды 207
— — цилиндра 224, 225, 226
Боковые ребра пирамиды 199
Большой круг шара 243
Бриансон Ш. 110
Вектор 376
— единичный 375
Вектора длина 376
Векторная алгебра 375
— величина 376
— сумма 378, 380
Векторное произведение 408
— равенство 380
Векторов вычитание 377
— сложение 377
Векторов умножение 393
Векторы коллинеарные 376
— компланарные 376

Величины векторные скалярные 376
Вершина конической поверхности 231
— пирамиды 199
— угла 266
Виет Ф. 259
Внешнее деление 19
— касание окружностей 87
Внешняя касательная к двум окружностям 87
Внутренняя касательная к двум окружностям 87
Вписанный многоугольник 108
— треугольник 109
— угол 94
— шар 252
Вспомогательный аргумент 294
Высота конуса 231
— отрезка цилиндра 226
— параллелограмма 69
— пирамиды 199
— призмы 190
— сегмента 102
— сегментной поверхности 244
— трапеции 76
— треугольника 44
— усеченного конуса 236
— цилиндра 223
Вычитание отрезков 15
Галилей Г. 192
Гармоническая группа точек 21
Гармонические колебания 306
Гармонически сопряженные точки 21
Гармоническое разделение 21
Гексаэдр 215
Геометрия 11
— аналитическая 12
— дифференциальная 12
— начертательная 12
— проективная 12
Геометрическое место точек 135, 255
Гильберт Д. 22
Гипербола 242
Гомотетия 57
Градус 29, 267
Гюльдена теорема 245
Двугранный угол 178
Декарт Р. 12
Деление внешнее 19
— внутреннее 19
— отрезка в заданном отношении 19
— — в среднем и крайнем отношении 20
Диагонали квадрата 73
— многогранника 189
— многоугольника 36
— параллелепипеда 191
— параллелограмма 69
— ромба 72
Диагональная плоскость многогранника 189
— — призмы 190
Диаметр окружности 82
— сферы 243
Дистрибутивность 396
Дифференциальная геометрия 12
Длина вектора
— дуги окружности 102
— окружности 99
— отрезка 18
Доказательство 24
Додекаэдр 216
Достаточное условие 26
Дуга 82
Единичный вектор 376
Заключение теоремы 24
Золотое сечение 20, 21
Измерение двугранных углов 179
— дуг 267
— отрезков 18
— площади 60
— углов 267
Измерения прямоугольного параллелепипеда 191
Икосаэдр 216
Инверсия 149
Интерполяция 414
Кавальери Б. 192

Касательная 83
Квадрат 73
Квадрируемость 61
Кеплер И. 259
Классификация аксиом 22
Клин 212
Коммутативность 396
Компланарность векторов 376
Компоненты вектора 384
Коллинеарность векторов 376
Координаты вектора 387
Коперник Н. 258
Кольцо 105
Конгруэнтность 24
Коническая поверхность 231
Конические сечения 242
Конус 231
Концентрические окружности 86
Координатные оси 270
Косеканс 261, 271
Косинус 260, 270
Котангенс 260, 270
Коэффициент подобия 57
Кривые второго порядка 242
Круг 83
Круглые тела 223
Куб 191
Лемма 24
Линдеман Ф. 100
Линейная зависимость векторов 384
Линия 13
Лобачевский Н. И. 12
Ломаная линия 14
Луч 14
Медиана треугольника 45
Мера угла 29
Метод геометрических мест 134
— инверсии 149
— параллельного переноса 147
— подобия 142
— симметрии 144
Методы графические 324
Минута 29
Многогранник 189
— выпуклый 190
— звездчатый 217
Многоугольник правильный 35
— простой 35
Многоугольников подобие 57
Модуль вектора 376
Мюллер И. 258
Наклонная к плоскости 167
Накрестлежащие углы 32
Направляющая 223
— конической поверхности 231
— цилиндрической поверхности 223
Натуральное значение тригонометрической функции 261
Начальная фаза 308
Начертательная геометрия 12
Независимость системы аксиом 22
Необходимое условие 26
Необходимый и достаточный признак 27
Непротиворечивость системы аксиом 22
Неравенство двугранных углов 178
Неравенство отрезков 15
Несоизмеримые отрезки 18
Нечетность функции 282
Нуль — вектор 376
Ньютон И. 101
Обелиск 213
Образующая 223
— конической поверхности 231
— конуса 231
— усеченного конуса 236
Обратная теорема 25
— функция 335
Обратные тригонометрические функции 335
— круговые функции 349
Общая мера двух отрезков 18
Объем геометрического тела 191
— клина 212
— конуса 232
— куба 192, 217
— обелиска 213
— отрезка цилиндра 226

Объем параллелепипеда 192
— пирамиды 201
— полого цилиндра 227
— призмы 192
— шара 247
— шарового сегмента 247
— — сектора 246
— цилиндра 225
— усеченного конуса 237
— — цилиндра 225
— усеченной пирамиды 208
— — сектора 246
Однородное уравнение 315
Односторонние углы 32
Окружность 82, 242
Окружность инверсии 149
Октаэдр 216
Описанный угол 94
— шар 252
Определение 24
Определитель 410
Ордината вектора 387
Ортоцентр 44
Орты 389
Осевая симметрия 144
Оси координатные 270
Основание конуса 231
— параллелограмма 69
— пирамиды 199
— сегмента 102
— сегментной поверхности 244
— усеченного конуса 236
— усеченной пирамиды 207
— трапеции 76
Основания призмы 190
— цилиндра 223
Острый угол 30
Ось абсцисс 270
— пучка 166
— конической поверхности 231
— котангенсов 272
— ординат 270
— радикальная 107
— тангенсов 272
Отношение отрезков 18
Отрезки несоизмеримые 18
— пропорциональные 19
— соизмеримые 18
Отрезков измерение 18
— отношение 18
Отрезок ориентированный 15
— прямой 14
Отрезок цилиндра 226
Парабола 242
Параллелепипед 191
— наклонный 191
— прямой 191
— прямоугольный 191
Параллелограмм 69
Параллелограмма признаки 71
Параллельное сечение 199, 200
Параллельные плоскости 174
— прямые 30, 166
Паскаль Б. 109
Первичные понятия 13
Пересечение окружностей 86
Периметр 34
Период 296
— колебаний 307
Периодичность тригонометрических функций 296
Перпендикуляр 167
Перпендикулярная плоскость 179
Перпендикулярные прямые 28
— плоскости 179
— сечения 190
Пирамида 199
— правильная 199
— усеченная 207
Пифагор 41
Планиметр 61
Планиметрия 11
Платон 216
Плоские сечения многогранников 189, 218
Плоский угол 186

Плоскость 13
— касательная к шару 243
Площадь 60
— квадрата 73
— кольца 103
— круга 102
— параллелограмма 69
— прямоугольника 71
— ромба 72
— сегмента 102
— сектора 102
— трапеции 76
— треугольника 61
— фигуры 60
— четырехугольника 363
Поверхность 13
— клина 212
— обелиска 213
— пирамиды 201
— полого цилиндра 226
— шара 245
— шарового пояса 245
— — сегмента 245
Подобие многогранников 213
— многоугольников 57
— треугольников 53
Подобные конусы 238
— цилиндры 238
— фигуры 57
Полигон векторов 377
Полная поверхность конуса 232
— — параллелепипеда 191
— — пирамиды 201
— — призмы 191
— — усеченного конуса 237
— — — цилиндра 225
— — усеченной пирамиды 207
— — цилиндра 225
Полнота системы аксиом 22
Полный угол 29
Половинный аргумент 286
Полупериметр 34
Полый цилиндр 226
Правильные многогранники 215
— многоугольники 114
Преобразование инверсии 149
Призма 190
— наклонная 190
— правильная 191
— прямая 190
Признаки равенства треугольников 51
— — трехгранных углов 187
Принцип Кавальери 192
Приращение функции 414
Проективная геометрия 12
Проекция вектора 384
— прямоугольная 168
Пропорциональные отрезки 19
Пропорциональный циркуль 17
Пропорция 19
Пространство трехмерное 386
Прямой двугранный угол 179
— круговой цилиндр 223
— угол 27
Прямоугольник 71
Прямоугольная проекция 168
Птолемей К. 109, 258
Пучок плоскостей 166
— прямых 31
Равенство векторов 376
— двугранных углов 178
— многогранных углов 186
— отрезков 15
— треугольников 51
— фигур 165
Равновеликие тела 192
Радиан 29, 267
Радикальная ось 107
Радикальный центр 108
Радиус 82
Радиус — вектор 270
— вписанной в треугольник окружности 68
— — основания конуса 231
— правильного многоугольника 114
— сферы 242
— цилиндра 224
Радиусы вневписанных окружностей 68

Трехгранный 386
Тупой угол 30
Угол 27, 266
— вписанный 94
— двугранный 178
— описанный 94
— между векторами 394
— — касательной и хордой 95
— — прямой и плоскостью 168
— острый 30
— прямой 27
— развернутый 27
— телесный 187
— тупой 30
— центральный 94
Углы вертикальные 28
— внешние 32, 34
— внутренние 32, 34
— многогранные 186
— накрестлежащие 32
— односторонние 32
— плоские 27, 186
— прилежащие 27
— равные 27
— смежные 27
— соответственные 32
— трехгранные 186
Умножение векторов 393
— отрезка на число 16
Уравнение 308
— тригонометрическое 308
Усеченная пирамида 207
Усеченный конус 236
— цилиндр 225
Условие достаточное 26
— необходимое 26
— теоремы 24
Фигура 11, 165
— пространственная 165
Формула Герона 61
— Эйлера 215
Формулы Мольвейде 350
— приведения 280
Функция тригонометрическая 270
Хорда 82
— круга 82
— сферы 242
Центр вписанной окружности 109
— гомотетии 57
— инверсии 149
— окружности 82
— описанной окружности 49, 109
— подобия 57
— правильного многоугольника 114
— радикальный 107
— сферы 242
— тяжести треугольника 45
— шара 243
Центральная симметрия 145
Центральный угол 94
Цилиндр 223
Цилиндрическая поверхность 223
— подковка 226
— труба 226
Циркуль пропорциональный 17
Частота 307
Чебышев П. Л. 151
Четность функций 282
Четырехугольник 81
Шар 243
Шаровая поверхность 242
Шаровой нояс 245
— сегмент 245
— сектор 245
— слой 245
Эвклид 11, 12, 375
Эйлер Л. 215, 259
Эллипс 242

СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Геометрия, тригонометрия, векторная алгебра

Под редакцией члена-корреспондента АН УССР
Фильчакова Павла Феодосьевича

Редактор *Р. Л. Имас*
Художественный редактор *В. М. Тепляков*
Оформление художника *Г. М. Балюна*
Технические редакторы *А. М. Лисовец, Н. П. Рахлина*
Корректор *Л. В. Лисицкая*
БФ 06566. Зак. 6-263. Изд. № 355. Тираж 500 000 (1—250000).
Формат бумаги 70 × 108/32. Печ. физ. листов 13,875.
Условн. печ. листов 19,43. Учетно-издат. листов 26,0.
Подписано к печати 24/IX 1966 г.
Бумага № 3. Цена 80 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Книжная фабрика им. Фрунзе Комитета по печати при Совете Министров УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.